場の量子論ゼミ

藤井友香

2008/9/8

1 はじめに

これまでは，loop グラフの計算を行わないでやってきた．しかし，具体的に loop を計算しようとすると，発散という問題が起こる．無限大の量は取り扱えないので，とにもかくにも発散を一時的に抑えることが必要になってくる．

と，いう訳で，

1. とにかく Feynman グラフの積分が収束して well-defined になるようにする (正則化)
2. 諸量を物理的な粒子の質量や結合定数で書き直す (くりこみ)

をしよう．

2 正則化

まず，簡単のため，ϕ^4 理論の 1-loop を考えよう．ファインマン伝播関数は，

$$\frac{-i\lambda}{2}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{-i}{m^2-l^2-i\epsilon}$$

．

2.1 Cut-Off の導入による正則化

4 次元運動量の上限 Λ を導入する．すると，

$$\Sigma(p^2)\propto\Lambda^2 \tag{1}$$

であることが分かる．

普通は，**Wick 回転**をした上で計算する．そうすると，

$$\Sigma(p^2)=\frac{\lambda}{32\pi^2}\left[\Lambda^2-m^2\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{m^4}{\Lambda^2}\right)\right] \tag{2}$$

となる．

2.2 次元正則化

次元 n を，解析接続によって複素数に拡張する．

一般に，Feynman グラフの任意の loop 積分は，

$$S = \int \frac{d^dk}{i(2\pi^d)} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, ...)}{[m^2 + 2k \cdot p - k^2 - i\epsilon]} \tag{3}$$
$$= \int \frac{d^dk}{i(2\pi^d)} \frac{(1, k_\mu - p_\mu, ...)}{[m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon]} \tag{4}$$

の形に書きなおせる．

まず，

$$I(\alpha) = \int \frac{d^dk}{i(2\pi)^d}(m^2 - k^2 - i\epsilon)^{-\alpha} \tag{5}$$

の評価を考える．

Wick 回転して，

$$I(\alpha) = \int \frac{d^dk}{i(2\pi)^d}(m^2 + k^2)^{-\alpha} \tag{6}$$

となる．

ガンマ関数

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty dt t^{\alpha-1}e^{-t} \tag{7}$$

を使えば，

$$I(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} (m^2)^{-(\alpha - d/2)} \tag{8}$$

となる．

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{9}$$
$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \qquad (\gamma \text{ は Euler 定数}=0.5772\cdots)$$

を使うと，

$\alpha = 1$ のときは，

$$\Sigma(p^2) = m^2 \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(-\frac{2}{4-d} - 1 + \gamma - \log\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \tag{10}$$

となる．ただしここで，$\Sigma(p^2)$ が p に依存しなくなるは，この理論の特殊性であって，一般には依存する．

つまり，次元正則化をすれば，発散項は極 $\frac{2}{4-d}$ として現れる．

3 くりこみ (裳華房風)

Tree のみのグラフは発散は起こらないので，有効作用を有限に抑えられれば場の理論に発散は出てこないということになる．有効作用の発散をおさえるため，**くりこみ**という操作をする．

実際の物理量では発散は起こらない筈だから，ループの計算で出てくる発散は，もともとの（=裸の）パラメータ m_0 や λ_0 の一部で相殺されていると考えられる．（つまり，裸のパラメータは発散量と考える．）だから，裸のパラメータを，観測される物理量と，発散を相殺する項に分けてやろうじゃないか．

3.1 質量のくりこみ

自己エネルギー Σ は，ローレンツ不変性より，p^2 の関数なので，$p^2 = m^2$ の周りでテーラー展開すると以下のようになる．

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + \Sigma'(m^2)(p^2 - m^2) + \tilde{\Sigma}(p^2) \tag{11}$$

(4) から分かるように，このように $(d/dp^2)\Sigma(p^2)$ をする度に k の次元は二つずつ下がっていく．なので，今の ($\Sigma(p^2)$ が二次発散する) 場合，第 2 項までは発散するが，$\tilde{\Sigma}(p^2)$ は有限にとどまってくれる．

Σ は最終的には

$$
\begin{aligned}
i\Delta'_F(p) &= \frac{-i}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \frac{-i}{m^2 - p^2 - i\epsilon}\{-i\Sigma(p^2)\}\frac{-i}{m^2 - p^2 - i\epsilon} && (12)\\
&= \frac{-i}{m^2 - p^2 + \Sigma(p^2) - i\epsilon} && (13)
\end{aligned}
$$

となり $\Delta'_F(p)$ にきいてくるが，これは以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
\Delta'_F(p) &= \frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)} && (14)\\
&= \frac{1}{\{1 - \Sigma'(m^2)\}\{p^2 - m_0^2 - \Sigma(m^2)\} - \tilde{\Sigma}} && (15)
\end{aligned}
$$

これは，$p = m_0^2 + \Sigma(m^2)$ のところで極を持っている．物理的質量は，伝播関数 $\Delta'_F(p)$ の極として定義されるので，

$$
m^2 \equiv m_0^2 + \Sigma(m^2) \tag{16}
$$

を物理的質量と見なせる．これを，**質量のくりこみ**という．

3.2 波動関数のくりこみ

(15) の留数は $1/1 - \Sigma'(m^2)$ となって 1 からずれているので，場の演算子の規格化因子も変更する必要がある．**場の演算子のくりこみ**は,

$$
\phi = Z_\phi^{-1/2}\phi_0 \tag{17}
$$

と書く．

結局，

もともとラグランジアンを作っていたパラメータ (これを**裸のパラメータ**という) を添字 0 で表して，

$$
\begin{aligned}
m^2 &= m_0 + \Sigma(m^2) && (18)\\
\phi &= Z_\phi^{-1/2}\phi_0 && (19)\\
\lambda &= Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0 \mu^{d-4} && (20)
\end{aligned}
$$

として新しいパラメータを作るのだ！！

4 くりこみ計算の具体例 (Peskin Schroeder 風)

新しいパラメータを使ってラグランジアンを以下のように書き直せる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!} && (21)\\
&\quad + \frac{1}{2}\delta_Z\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + \frac{1}{2}\delta_m\phi^2 - \frac{1}{4!}\delta_\lambda\phi^4 && (22)
\end{aligned}
$$

$$
\delta_Z = Z_\phi - 1,\ \ \delta_m = m_0^2 Z_\phi - m^2,\ \ \delta_\lambda = \lambda_0 Z_\phi^2 - \lambda \tag{23}
$$

観測量は有限だから，Feynman グラフの loop の計算によってでてくる発散は，裸のパラメータに含まれる発散と打ち消しあうと考えられるが，その相殺する役目を果たす (22) の行を，相殺項 (counter term) と呼ぶ．

(21)(22) の最初の二項を自由場のラグランジアン，残りを相互作用のラグランジアンと考えると，新しい Feynman 則は，図のようになる．

ここで，δ_Z，δ_m，δ_λ は，それぞれ，1，m^2，λ に比べて $\hbar$ の次数が一つ大きいことに注意しよう．これらは，$\hbar$ のべきで展開して

$$\delta_Z = \delta_Z^{(1)} + \delta_Z^{(2)} + \cdots \tag{24}$$

$$\delta_m = \delta_m^{(1)} + \delta_m^{(2)} + \cdots \tag{25}$$

$$\delta_\lambda = \delta_\lambda^{(1)} + \delta_\lambda^{(2)} + \cdots \tag{26}$$

のように書ける．

- δ_λ
  2 粒子の散乱を考えると，下のようになる．

  $\mathcal{O}(\hbar^{-1})$，$\mathcal{O}(\hbar^0)$ では，

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \tag{27}$$

$$\equiv (-i\lambda)^2 iV(p^2) \tag{28}$$

となるから，

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2[iV(s) + iV(t) + uV(u)] - i\delta_\lambda \tag{29}$$

となる．ここで，$p_1^2 = p_2^2 = m^2 (p^2 = 4m^2)$ のとき，後ろの二項が相殺するように，つまり

$$-i\mathcal{M} = -i\lambda \tag{30}$$

となるように δ_λ をとることにする．
具体的に，$d \to 4$ のときで $V(p^2)$ を計算すると，

$$V(p^2) = \frac{i}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2xk \cdot p + xp^2 - m^2]} \tag{31}$$

$$= \cdots \tag{32}$$

$$\to -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log[m^2 - x(1-x)p^2] \right) \tag{33}$$

となるので,

$$\delta_\lambda \to -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left(\frac{6}{\epsilon}-3\gamma+3\log(4\pi)-\log[m^2-x(1-x)m^2]-2\log m^2\right) \tag{34}$$

とする．そうすると，$\mathcal{M}$ は有限に収まってくれる．

- δ_Z，δ_m

二点相関関数は,

$$= \tag{35}$$

$$=\frac{i}{p^2-m^2-M^2(p^2)} \tag{36}$$

となる．

m が物理的質量であることは,

$$M^2(p^2)|_{p^2=m^2} \tag{37}$$

と同値だ．また，波動関数が正しく規格化されているということは,

$$\frac{d}{dp^2}M^2(p^2)|_{p^2=m^2}=0 \tag{38}$$

と同値だ．

二点相関関数に寄与する $\hbar$ の最低次のグラフは，だから，この次数で,

$$-i\Sigma = \tag{39}$$

$$=-i\lambda\frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{k^2-m^2}+i(p^2\delta_Z-\delta_m) \tag{40}$$

$$=-i\lambda\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}(m^2)^{1-d/2}}\frac{i}{k^2-m^2}+i(p^2\delta_Z-\delta_m) \tag{41}$$

となる．

(36)，(37) が成り立つためには,

$$\delta_Z=0 \tag{42}$$

$$\delta_m=-\frac{\lambda}{2(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{(m^2)^{1-d/2}} \tag{43}$$

とすれば良い．

5 くりこみ可能性

5.1 質量次元

今，$\hbar=c=1$ の単位系で考えているので，あらゆる量を質量次元で表すことができる．なので，今後，質量次元を次元と呼んでよい．

例えば，長さの次元 $[L]$ をもつ x^μ は，$1=c/\hbar(=[L]^{-1}[M]^{-1})$ をかけることで，次元 -1 となることが分かる．

♠ **場の次元**

- スカラー場

$$S=\int d^dx\left\{\frac{1}{2}(\partial\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi\right\} \tag{44}$$

よって，スカラー場の次元は,

$$[\phi]=\frac{d-2}{2} \tag{45}$$

- フェルミオン場

$$S=\int d^dx\left\{\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi-\cdots\right\} \tag{46}$$

よって，スカラー場の次元は,

$$[\psi]=\frac{d-1}{2} \tag{47}$$

- ベクトル場

$$S=\int d^dx\left\{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}+\frac{m^2}{2}A_\mu^2\right\} \tag{48}$$

これらの場をひっくるめて ϕ_i と書くと，一般的に,

$$[\phi_i]=\frac{d-\sigma_i}{2} \tag{49}$$

と書ける．ただし，σ_i は，スカラー場なら 2，フェルミオン場なら 1，ベクトル場なら 0 をとる変数とする．

5.2 くりこみ可能性

ϕ を一般の場として,

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{free}+\Sigma_j\mathcal{L}_{int,j} \tag{50}$$

$$\mathcal{L}_{int,j}=g_j(\partial)^{d_j}(\phi_1)^{n_{1j}}(\phi_2)^{n_{2j}}\cdots(\phi_l)^{n_{lj}} \tag{51}$$

というラグランジアンを考える．

以下では，粒子 ϕ_i の内線の本数を I_i，外線の本数を E_i，ループの数を L とする．

♠ **使う関係式**

$$E_i+2I_i=\sum_j n_{ij}$$

$$L=\sum_i I_i-\sum_j v_j+1$$

♠ vertex **の次元** $\delta(V_j)$

$$V_j=\int d^dx(\partial)^{k_j}(\phi_1)^{n_{1j}}(\phi_2)^{n_{2j}}\cdots(\phi_l)^{n_{lj}} \tag{52}$$

の次元は,

$$\delta(V_j)=-d+k_j+\sum_{i=1}^{l}n_{lj}[\phi_l] \tag{53}$$

♠ **ダイアグラムの発散の度数** $\delta(\gamma)$

V_j の vertex が現れる回数を v_j とおくと，

$$\begin{aligned}\delta(\gamma) &= d_L - \sum_i I_i\sigma_i + \sum_j v_j k_j & (54)\\ &= d(\sum_i I_i - \sum_j v_j + 1) - \sum_i I_i\sigma_i + \sum_j v_j k_j & (55)\\ &= d + \sum_i I_i(d-\sigma_i) + \sum_j v_j(-d+k_j) & (56)\\ &= d + \sum_i 2I_i[\phi_i] - \sum_{i,j} n_i^j v_j[\phi_i] + \sum_j v_j(-d+k_j+n_i^j[\phi_i]) & (57)\\ &= d - \sum_i E_i[\phi_i] + \sum_j v_j\delta(V_j) & (58)\end{aligned}$$

と計算される．

♠ **次数勘定定理**

loop の数が二つ以上あるときは，それぞれ個々の loop 積分にそのグラフ中のすべての伝播関数や頂点が関わっている訳ではないから，$\delta(\gamma) < 0$ は必ずしもそのグラフ Γ が発散を含まないことを保障しない．しかし，「ある Feynman グラフの Γ の Feynman 積分は，もし，Γ 自身も含めて Γ の任意の 1PI グラフ γ に対して，その $\delta(\gamma) < 0$ であるならば，(伝播関数中の $-i\epsilon$ 処法の $\epsilon > 0$ を固定したとき，) 絶対収束する．」

♠ **結局，**

- $\delta(V_j) > 0$ となると，vertex の数が多いほど発散の次数が減る
  →発散が起こるのは，低次の特定の有限個のグラフのみ
  →超くりこみ可能
- $\delta(V_j) > 0$ となると，vertex の数が多くなっても発散の次数は変わらない
  → () より，$\delta(\gamma) > 0$ となるグラフは，$d - \sum_i E_i[\phi_i] > 0$ となるもののみで，有限種類
  →くりこみ可能
- $\delta(V_j) > 0$ となると，vertex の数が多いほど発散の次数が増える
  →発散グラフは無限種類
  →くりこむのに，無限個の結合定数の指定が必要
  →くりこみ不可能

(例)

$d = 4$ のとき，

$$V = \int d^4x\phi^3 \qquad (\delta(V) = -4 + 3 = -1)$$
$$V = \int d^4x\bar{\psi}\phi \qquad (\delta(V) = -4 + 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 0)$$

などはくりこみ可能．

$$V = \int d^4x\bar{\psi}\ \not{A}\psi\ (\delta(V) = -4 + 3 + 2 = 1)$$
$$V = \int d^4x\phi^2 A^2\ (\delta(V) = 2)$$

などはくりこみ不可能.

6　くりこみ条件

一般に，くりこみによって発散項からどれだけ引き算するかには任意性がある．これを指定するのがくりこみ条件である．

上の例では，(30)(37)(38) がくりこみ条件になっている．

このように，物理的な質量のところで繰り込み条件を課す，つまり，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2=m^2;m^2,\lambda)=0\\
&\frac{\partial}{\partial p^2}\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2;m^2;\lambda)\Big|_{p^2=m^2}=1\\
&\tilde{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{p};m^2,\lambda)\Big|_{p_i\cdot p_j}=m^2\delta_{ij}-\frac{1}{3}m^2(1-\delta_{ij})=-\lambda
\end{aligned}$$

となるようにとることがよく行われる．これを，**質量殻上のくりこみ条件**という．

しかし，例えば，$p_i^\mu=0$ の点でくりこんでも，発散の処理としては構わない．

他の条件の付け方として，

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p^2=0,m^2,\lambda;\mu^2)|_{m^2=0}=0 \tag{59}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\Gamma^{(2)}_{ij}(p^2=0,m^2,\lambda;\mu^2)|_{m^2=\mu^2}=-\delta_{ij} \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{(2)}_{ij}(p^2,m^2,\lambda;\mu^2)|_{p^2=0,m^2=\mu^2}=+\delta_{ij} \tag{61}$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(\mathbf{p}\ \ =0,m^2,\lambda;\mu^2)|_{m^2=\mathrm{m}^2}=-\lambda\delta_{ijkl} \tag{62}$$

がある．これを，**質量によらない対称なくりこみ条件**という．

7　くりこみ群