場の量子論ゼミ

藤井友香

2008/9/26

1　BRS 変換

♠ φ や A の BRS 変換

今まで、$U = \exp\{i\theta^a(x)T_a\}_i^j$ によるゲージ変換を考えていたが、パラメータを $\theta^a = -g\lambda c^a$(ただし λ はグラスマン数、c^a はゴースト場) と取り直すと、

$$\delta\varphi_i'(x) = \lambda(-igc^a(x)T^a\Psi(x)) \equiv \lambda\delta_B\Psi(x)$$
$$\delta A_\mu'(x) = \lambda(\partial_\mu\epsilon^a(x) \tag{8.1}$$

♠ ゴースト場の BRS 変換

べき零則；「変換 δ_B を 2 回続けて行うと 0 になる」を要請することで、

$$\delta_B c^a(x) = \frac{g}{2}f_{abc}c^b(x)c^c(x) \tag{8.3}$$

ただし、

$$\delta_B(\delta_B C) = -ig\delta_B(CC) \tag{1}$$
$$= -ig[(\delta_B C)C - C\delta_B C] \tag{2}$$
$$= (ig)^2[C^2C - CC^2] = 0 \tag{3}$$

より、ここでもべき零性が成り立っていることが分かる。

♠ 反ゴースト場の BRS 変換

$$\delta_B\bar{c}^a(x) = iB^a(x) \tag{8.6}$$

♠ 中西・ロートラップ場の BRS 変換

$$\delta_B B^a(x) = 0 \tag{8.6}$$

これにより、反ゴースト場でも中西・ロートラップ場でもべき零性が成り立っていることが分かる。

2　ラグランジアンでのゲージ固定

ゲージ固定関数：$F^a(A, \psi, c, \bar{c}, B)$ を、ゴースト数が 0 で、ゲージ固定が完全に行われるようなものを用意して、ゲージ固定とゴースト場を担うラグランジアンを、

$$\mathcal{L}_{GF+FP} = -i\delta_B(\bar{c}^aF^a) \tag{8.8}$$

ととる。

そして、それを足した全体のラグランジアン、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{GF+FP}$$

を使って正準量子化する。

♠ 例

共変ゲージ固定；

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a \tag{8.9}$$

とする。

これは、計算すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{GF+FP} &= \{\delta_B \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}(B^a)^2\} + o\bar{c}^a\partial^\mu(\delta_B A_\mu^a) \\ &= \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}\end{aligned} \tag{8.10}$$

となる。

全ハミルトニアンは、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{GF}(A, B) + \mathcal{L}_{FP}$$

となる。

$\mathcal{L}$ がエルミートであるため[*1] に、c や $\bar{c}$ がエルミート、つまり

$$(c^a(x))^\dagger = c^a(x)\ (\bar{c}^a(x))^\dagger = \bar{c}^a(x) \tag{8.21}$$

が必要。

これらを使って量子化すると、(8.17)-(8.19) になる。A^0 を B の共役とすることができて、単純に量子化できる。

3 BRS 電荷

BRS 変換は、ゲージ変換の特殊な場合であって、しかもパラメータが x に依存しないので、BRS 変換に対する不変性は大局的不変性である。

よってネーターの方法でカレント $J_B^\mu(x)$ を (8.23) のように構成できる。また、保存電荷 Q_B は (8.25) のようになる。 Q_B を BRS 電荷と呼ぶ。これは BRS 変換の生成子になっている。

4 ゴースト電荷

ラグランジアンは、ゴースト場の

$$c^a(x) \to e^\rho c^a(x),\ \bar{c}^a(x) \to e^{-\rho}\bar{c}^a(x)$$

の変換に対して不変である。

よってネーターの方法でカレント J_c^μ を (8.27) のように構成できる。また、保存電荷 Q_c は (8.28) のようになる。これをゴースト電荷と呼ぶ。これは (8.26) のスケール変換の生成子になっている。つまり、

$$[iQ_c, c^a] = \rho c^a(x)\ [iQ_c, \bar{c}^a(x)] = -\rho\bar{c}^a$$

[*1] $\mathcal{L}$ のエルミート性は、S 行列のユニタリー性などに関わってきて、他の部分で理論に矛盾が出ないようにするために必要。

この式から、以下のようなゴースト数が、**ゴースト数演算子** $N_{FP} \equiv iQ_c$ の固有値で与えられ、保存することが分かる。

- c^a ; +1
- $\bar{c}^a$; -1
- δ_B ; +1

ゴースト電荷はエルミートであり、ゴースト数演算子は反エルミートである。Q_B と Q_C の交換関係を求めると、

$$\{Q_B, Q_B\} = 0,\ [iQ_C, Q_B] = Q_B,\ [Q_C, Q_C] = 0 \tag{8.32}$$

となる。

5　物理的状態を指定する補助条件

共変的ゲージ固定で量子化したゲージ理論では、ゲージ場 A_μ^a は負のノルム状態を含む。つまり、負の確率が出てきてしまう。全状態空間の中からこれらを省き、物理的状態で構成される部分空間を選び出すために、補助条件として、

$$Q_B|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{8.33}$$

を課せばよいことが分かっている。