7. Path Integral Quantization of The Gauge Theory

——————— 2008/9/8, Toshiya Namikawa

TABLE OF CONTENTS

1 古典的ゲージ場の一般論

1.1 ゲージ理論の一般論

すでに述べたように、ゲージ原理を仮定した理論をゲージ理論と言い、その一例として $U(1)$ ゲージ理論である QED について少しだけ触れた。ここではさらに一般的な $SU(N)$ ゲージ理論について少しだけ触れることにする。

$SU(N)$ ゲージ理論は $U(1)$ ゲージ理論のように新たな物理量であるゲージ場を導入して、ローカルな位相変換に対して対称性をもつことを主張する。具体的には、交換関係を積とした Lie 環である $SU(N)$ 代数 $\mathscr{L}(N)$ の基底 $T_{(aij)}$ をとったとき、すべての $\mathscr{L}(N)$ の要素 $X_{(ij)}$ は複素数 $c_{(a)}$ を用いて $X_{(ij)} = c_{(a)}T_{(aij)}$ の形に書け、これに対する $SU(N)$ の要素 $U_{(ij)} = e^{iX_{(ij)}}$ を得る。このとき波動関数 $\phi_{(i)}$ を、$c_{(a)}$ を $gc_{(a)}(x)$ に置き換えて得た $U_{(ij)}(x)$ を用いて [*1]

$$\phi'_{(i)}(x) = U_{(ij)}(x)\phi_{(j)}(x) \tag{1}$$

のように変換しても Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が不変であることをゲージ原理は要求する。この変換はゲージ変換という。ただし g は実数である。

[*1] x に依存させるのはいいとして、ここで実数 g を用いたのはあとの都合のためである。また、$\mathscr{L}(N)$ は $T_{(a)}T_{(b)} = f_{(abc)}T_{(c)}$ となる構造定数 $f_{(abc)}$ をもつ。

しかしこの要請を満たすには、必然的に $\mathscr{L}(N)$ の要素を理論に用いなければいけなくなる。実際、各波動関数は各時空点で式（1）を満たすように変換を行う。したがってその変換を、x から微小に離れた時空点 $x+dx$ において一次の微小量まで考えれば

$$
\begin{aligned}
\phi_{(i)}(x+dx) &= U_{(ij)}(x+dx)\phi_{(j)}(x+dx) \\
&= \exp[igc_{(a)}(x+dx)T_{(aij)}]\phi_{(j)}(x+dx) \\
&\simeq \phi_{(i)}(x) + \partial_\mu(\phi_{(i)} + igc_{(a)}(x)T_{(aij)}\phi_{(j)}(x))dx^\mu
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となる。ここで $A_{(a)\mu}(x) \equiv -\partial_\mu c_{(a)}(x)$ を**ゲージ場**と呼ぶ。これを用いて上式を書きなおすと

$$
\phi_{(i)}(x+dx) - \phi_{(i)}(x) = (\partial_\mu\phi_{(i)} - igA_{(a)\mu}(x)T_{(aij)}\phi_{(j)}(x))dx^\mu \tag{3}
$$

となるが、左辺は i 番目の波動関数を、時空点 x と $x+dx$ で見たときの値の差に相当し、その差が右辺のように表されるのである。特に

$$
D_{(ij)\mu}(x) = \partial_\mu\delta_{(ij)} - ig(x)A_{(a)\mu}(x)T_{(aij)} \tag{4}
$$

で定義される量 D は**共変微分**と呼ばれ、式（3）は

$$
\phi_{(i)}(x+dx) - \phi_{(i)}(x) = D_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x)dx^\mu \tag{5}
$$

と書きなおされる。あるいは、同一の時空点 $x+dx$ において i 番目の波動関数 $\phi_{(i)}$ を比較することを考えると、スカラーである $\phi_{(i)}(x)$ を $x+dx$ まで平行移動させたもの $\phi_{/(i)}(x+dx)$ と $\phi_{(i)}(x)$ は同じ値をもつから、式（5）は

$$
\phi_{(i)}(x+dx) - \phi_{/(i)}(x+dx) = D_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x)dx^\mu \tag{6}
$$

とも書ける。

▶ 平行移動とゲージ場の導入 ◀

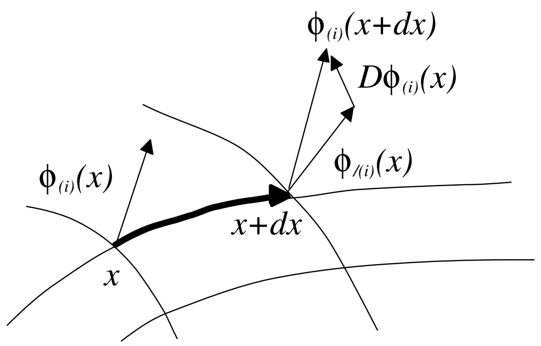

FIG 1:

ゲージ場を新たに導入しなければいけなくなったという理由を別の観点から考察してみよう。ゲージ原理の主張は、各点において、位相をずらす範囲においては座標の張りかたを変えても理論が成立するようにすることであった。しかし各点ごとに座標を変えると、ある点から別の点に移るときに、ベクトルの平行移動という概念は変更を受ける。したがってベクトルに対する平行移動を改めて定義する必要がでてくる。

ここで $\phi_{(i)}(x)$ を添え字 i の共変ベクトルと考えてみよう。すると $x+dx$ へ微小平行移動したベクトル $\phi_{/(i)}(x+dx)$ は、一般的な座標変換のもとでは

$$\phi_{/(i)}(x+dx) \equiv \phi_{(i)}(x) + igA_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x)dx^{\mu} \tag{7}$$

で定義される。ここで現れた $A_{(ij)\mu}$ は**接続**とよばれ、相対論においては Christoffel 記号に相当する。ここで、ベクトル $\phi_{(i)}(x)$ を $x+dx$ へ平行移動したものと、$x+dx$ でのベクトル $\phi_{(i)}(x+dx)$ を $x+dx$ において比較すると、

$$\begin{aligned}\phi_{(i)}(x+dx) - \phi_{/(i)}(x+dx) &= (\phi_{(i)}(x) + \partial_{\mu}\phi_{(i)}(x)dx^{\mu}) - (\phi_{(i)}(x) + igA_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x)dx^{\mu}) \\ &= (\partial_{\mu}\delta_{(ij)} - ig(x)A_{(ij)\mu}(x))\phi_{(j)}(x)dx^{\mu}\end{aligned} \tag{8}$$

と書ける。ここで $D_{(ij)\mu}(x) \equiv \partial_{\mu}\delta_{(ij)} - ig(x)A_{(ij)\mu}(x)$ を一般的に共変微分といい、式（8）は

$$\phi_{(i)}(x+dx) - \phi_{/(i)}(x+dx) = D_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x)dx^{\mu} \tag{9}$$

と書きなおされる。すると、式（6）と式（9）は形は同一のものを与えていることに気付く。式（6）のほうは $\phi_{(i)}$ をスカラーとして考えているのに対し、式（9）では $\phi_{(i)}$ をベクトルとして考えている点が異なるだけである。このことから、ゲージ場を導入しなければならないのは座標の張り方が各時空点で異なることによって生じる接続 $A_{(ij)\mu}$ によるものであると考えられる。そして、座標変換として位相をずらす範囲に限った場合には、接続は

$$A_{(ij)\mu} = A_{(a)\mu}(x)T_{(aij)} \tag{10}$$

のように、Lie 環 $\mathscr{L}(N)$ の元を用いて書くことができるというわけである。

▶ 共変微分の性質 ◀

共変微分の性質をみるため、波動関数 $\phi_{(i)}(x)$ をゲージ変換すると、

$$\phi_{(j)}(x) = U_{(ij)}(x)\phi_{(i)}(x) \tag{11}$$

となる。これより、共変微分に対して

$$D_{(ij)\nu}(x) = U_{(jl)}(x)D_{(lk)\mu}(x)U^{-1}_{(ki)}(x) \tag{12}$$

が成り立つので、

$$D_{(ij)\mu}(x)\phi_{(j)}(x) = U_{(jl)}(x)D_{(lk)\mu}(x)\phi_{(k)}(x) \tag{13}$$

が成り立つ。ゲージ場の変換は

$$A_{(ij)\mu}(x) = \frac{i}{g}U_{(jl)}(x)\partial_{\mu}U^{-1}_{(li)}(x) + U_{(jl)}(x)A_{(lk)\mu}(x)U^{-1}_{(ki)}(x) \tag{14}$$

となる。

▶ 場の強さ ◀

今度は 2 回平行移動を行う場合の差を考える。

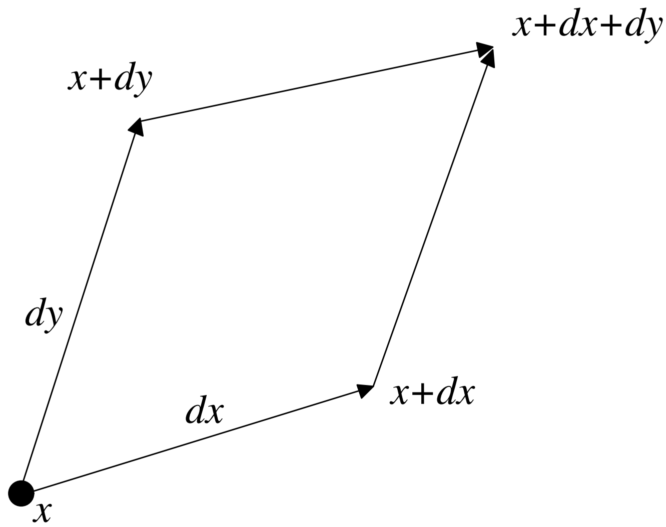

FIG 2:

このとき、2 つの経路 $x \to x+dx \to x+dx+dy$ と $x \to x+dy \to x+dx+dy$ が考えられるが、この 2 つの平行移動を行うときの差を計算する。ある時空点 z からそれぞれ x、y 方向への平行移動による共変ベクトル $\phi_{(i)}(z)$ の変化が

$$\phi_{/(i),x} \equiv \phi_{/(i)}(z+dx) = \phi_{(i)}(z+dx) - D_{(ij)\mu}(z)\phi_{(j)}(z)dx^\mu \tag{15}$$

$$\phi_{/(i),y} \equiv \phi_{/(i)}(z+dy) = \phi_{(i)}(z+dy) - D_{(ij)\mu}(z)\phi_{(j)}(z)dy^\mu \tag{16}$$

で与えられることから実際に計算を行うと、$x \to x+dx \to x+dx+dy$ は

$$\begin{aligned}\phi_{/(i),x\to y} &= \phi_{/(i),x}(x+dx+dy) - D_{(ij)\nu}\phi_{/(j),x}(x+dx)dy^\nu \\ &= \phi_{(i)}(x+dx+dy) - D_{(ik)\mu}\phi_{(k)}(x+dy)dx^\mu - D_{(ij)\nu}\phi_{(j)}(x+dx)dy^\nu + D_{(ij)\nu}D_{(jk)\mu}\phi_{(k)}(x)dx^\mu dy^\nu\end{aligned}$$

である一方で、$x \to x+dy \to x+dx+dy$ は

$$\begin{aligned}\phi_{/(i),y\to x} &= \phi_{/(i),y}(x+dx+dy) - D_{(ij)\nu}\phi_{/(j),y}(x+dy)dx^\nu \\ &= \phi_{(i)}(x+dx+dy) - D_{(ik)\mu}\phi_{(k)}(x+dx)dy^\mu - D_{(ij)\nu}\phi_{(j)}(x+dy)dx^\nu + D_{(ij)\nu}D_{(jk)\mu}\phi_{(k)}(x)dy^\mu dx^\nu\end{aligned}$$

となるから、経路による差は

$$\Delta\phi_{(i)}(x) = [D_{(ij)\mu}, D_{(jk)\nu}]\phi_{(k)}(x)dx^\mu dy^\nu \tag{17}$$

のように書ける。ここで現れた $F_{(ij)\mu\nu} \equiv i[D_{(ik)\mu}, D_{(kj)\nu}]/g$ を**場の強さ**という [*2] 。これをゲージ場を用いて具体的に表現すれば

$$F_{(ij)\mu\nu} = \partial_\mu A_{(ij)\nu} - \partial_\nu A_{(ij)\mu} - ig[A_{(ik)\mu}, A_{(kj)\nu}] \tag{18}$$

である。これも同じ座標点で ${F'}_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}U(x)^{-1}(x)$ のように変換する。

また、完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いた Jacobi の恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu, [D_\rho, D_\sigma]] = 0$ を使えば、

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu F_{\rho\sigma} - ig[A_\nu, F_{\rho\sigma}]) = 0 \tag{19}$$

が成り立つが、これを **Bianchi の恒等式**という。

▶ ゲージ不変な Lagrangian 密度の構成 ◀

今までの手続きを追えば、ゲージ変換のもとで不変な Lagrangian 密度を構成することが簡単にできる。具体例として、スカラー場、Dirac 場の場合は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scalar}} &= (D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi) \\ \mathcal{L}_{\text{Dirac}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \end{aligned} \tag{20}$$

のように、微分を共変微分に置き換えることになる。また、各ゲージ場 A^a_μ に対応する Lie 環の構造定数を f^a_{bc} と書けば、

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{21}$$

として、ゲージ不変なゲージ場に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \tag{22}$$

となる。

$U(1)$ ゲージ理論の場合は生成子は一つしかないので構造定数はゼロとなるが、一般にはそうではない。このようなときは生成子どうしが非可換であることから**非可換ゲージ理論**、あるいは **Yang-Mills 理論**と呼ばれる。構造定数は、生成された群がコンパクトであるかぎり下つきの添字に対して反対称である。

1.2 QED における正準形式と拘束条件

ゲージ場の量子化を行う際、スカラー場や Dirac 場のように正準形式を用いるといくつかの困難にぶつかる。ここではそのことについて述べる。

[*2] 数学ではこれを曲率テンソルなどという。

▶ 拘束条件 ◀

まずゲージ場の正準形式を実際に構築することで、拘束条件と呼ばれる困難にぶつかることを、具体的に $U(1)$ ゲージ理論である QED ついてみていくことにする。

QED の場合、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{23}$$

と書ける。ここで

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{24}$$

である。まず Dirac 場 ψ については、その共役な運動量を

$$\pi_\psi \equiv \frac{\partial^R}{\partial(\partial_0\psi)}\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = i\psi^\dagger \tag{25}$$

と右微分で定義する。したがって、Dirac 場についていは共役運動量を $i\psi^\dagger$ として正準量子化すればよいわけである。しかし一方で、ゲージ場 A_0 の共役運動量は

$$\pi^0 \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0 \tag{26}$$

となり、共役運動量が存在しなくなる。つまり、座標とその共役がすべて独立というわけではない。こういう場合を**拘束条件がある**という。QED では、この段階ではこれ以外に拘束条件は表れない。

▶ 拘束条件の分類 ◀

今度は正準形式における時間発展を考察しよう。正準 Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{QED}} = \pi^\mu\partial_0 A_\mu + \pi_\psi\partial_0\psi - \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} \tag{27}$$

と書ける。しかし、拘束条件 $\pi^0 = 0$ がある場合には Hamiltonina 密度に、π^0 に定数 λ をかけたものを加えてもよいので、新たに Hamiltonian を

$$\mathcal{H}_{\mathrm{QED}} = \pi^\mu\partial_0 A_\mu + \pi_\psi\partial_0\psi - \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} + \lambda\pi^0 \tag{28}$$

というように取り直してもよい。しかしこのとき、π^0 の時間発展は

$$\frac{d\pi^0(x)}{dx^0} = \left\{\pi^0(x), \int d^3y\mathcal{H}_{\mathrm{QED}}(y)\right\}_{\mathrm{P}}\Bigg|_{x^0=y^0} = D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x) \tag{29}$$

であり、結局 λ を入れようが入れまいが変わらない。すなわち、もしここで拘束条件式 $\pi^0 = 0$ を使えば、上式から新たな拘束条件 $D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x) = 0$ がどうしても生まれてしまうのである。この拘束条件式の物理的意味はまさに Gauss の法則そのものである。

この時間発展をさらに計算すると、

$$\frac{d}{dx^0}(D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x)) = \left\{D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x), \int d^3y\mathcal{H}_{\mathrm{QED}}(y)\right\}_{\mathrm{P}}\Bigg|_{x^0=y^0} = 0 \tag{30}$$

となり、今まで得られた拘束条件を課しても、新たな拘束条件は得られない。一般のゲージ場に対してはこのようにしていくつもの拘束条件がでてくる。そこで、このようにして得られた拘束条件どうしの Poisson 括弧を計算し、その後に拘束条件式を代入するとそれらがすべてゼロとなるものを**第 1 類拘束条件**、そうでない場合を**第 2 類拘束条件**という。

実際に QED で計算を行ってみよう。すでに見たように、QED における拘束条件は

$$\pi^0(x) = 0, \quad D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x) \tag{31}$$

である。これらの Poisson 括弧を計算すると

$$\{\pi^0(x), \pi^0(y)\}_{\mathrm{P}}|_{x^0=y^0} = 0 \tag{32}$$
$$\{\pi^0(x), (D_j\pi^j(y) - e\rho^0(y))\}_{\mathrm{P}}|_{x^0=y^0} = 0 \tag{33}$$
$$\{(D_j\pi^j(x) - e\rho^0(x)), (D_j\pi^j(y) - e\rho^0(y))\}_{\mathrm{P}}|_{x^0=y^0} = 0 \tag{34}$$

となり、拘束条件式を代入しなくてもすべてゼロとなっている。とりあえず、QED における拘束条件は第 1 類拘束条件であることが分かった。

1.3 ゲージ場における正準形式と拘束条件による量子化

$U(1)$ ゲージ理論である QED においてでてきた拘束条件は、ゲージ場の正準形式を考える際に一般的なものである。ここでは、一般的な非可換ゲージ場の正準形式を扱う際にでてくる拘束条件の一般論を述べよう。

► 拘束条件 ◄

一般に、Lagrange 形式から正準形式に移るとき、共役運動量

$$p_i = \frac{\partial^r}{\partial \dot{q}^i}\mathcal{L}(q, \dot{q}) \qquad (i = 1, 2, \cdots N) \tag{35}$$

のように、Grassmann 数の場合も考えて右微分で定義する。この連立方程式から $\dot{q}^i$ を p_i, q_i で表すわけだが、

$$\det\left|\frac{\partial^r}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial^r}{\partial \dot{q}^j}\mathcal{L}(q, \dot{q})\right| = 0 \tag{36}$$

のときには逆関数の定理によりそのようなことができない。このような場合を**特異系**というが、この式が意味するのは p_i が互いに独立ではない、すなわち p, q の拘束条件

$$f_n(p, q) = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots l) \tag{37}$$

が存在するということである。この拘束条件の数は

$$l = N - \mathrm{rank}\left[\frac{\partial^r}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial^r}{\partial \dot{q}^j}\mathcal{L}(q, \dot{q})\right] \tag{38}$$

である。

このように、一般には $\dot{q}^i$ すべてを p, q で表すことができないのにもかかわらず、Hamiltonian は $\dot{q}^i$ を含まない。実際、Hamiltonian は

$$H(p,q) = p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) \tag{39}$$

として決まるが、変分をとると

$$\begin{aligned}\delta H(p,q) &= p_i\delta\dot{q}^i + \delta p_i\dot{q}^i - \frac{\partial^r}{\partial\dot{q}}L\delta\dot{q}^i - \frac{\partial^r}{\partial q^i}L\delta q^i \\ &= \delta p_i\dot{q}^i - \frac{\partial^r}{\partial q^i}L\delta q^i \\ &= \delta p_i\frac{\partial^l}{\partial p^i}H + \frac{\partial^r}{\partial q^i}H\delta q^i\end{aligned} \tag{40}$$

と表され、$\delta\dot{q}$ は現れない。

拘束条件がある場合の正準形式では、Lagrange の未定乗数 λ_n を使って、新たに Hamiltonian を

$$H' = H + \phi_n\lambda_n \tag{41}$$

とする。これから、時間発展は

$$\dot{q}^i = \frac{\partial^r}{\partial p_i}H' = \frac{\partial^r}{\partial p_i}H + \left(\frac{\partial^r}{\partial p_i}f_n\right)\lambda_n \tag{42}$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial^l}{\partial q_i}H' = -\frac{\partial^l}{\partial q_i}H - \left(\frac{\partial^l}{\partial q_i}f_n\right)\lambda_n \tag{43}$$

として決まる。また、Grassmann 数を考慮した Poisson 括弧の定義は、力学量を F, F' として

$$\{F,F'\}_P = \frac{\partial^r F}{\partial q^i}\frac{\partial^l F'}{\partial p_i} + \frac{\partial^l F}{\partial p^i}\frac{\partial^r F'}{\partial q_i} \tag{44}$$

としておく。こうすれば、時間発展は

$$\dot{q}^i = \{q^i, H'\}_P = \{q^i, H\}_P + \{q^i, f_n\}_P\lambda_n \tag{45}$$

$$\dot{p}^i = \{p^i, H'\}_P = \{p_i, H\}_P + \{p_i, f_n\}_P\lambda_n \tag{46}$$

のように表せる。また、一般の p, q の関数 $f(p,q)$ に対する時間発展は

$$\dot{f} = \{f, H'\}_P \tag{47}$$

と表せる。

▶ 拘束条件の分類 ◀

拘束条件が時間発展しないという条件を考えると、拘束条件の時間発展

$$\dot{f}_n = \{f_n, H\}_P + \{f_n, f_m\}_P\lambda^m \tag{48}$$

に対して、この式に拘束条件をすべて代入すればゼロになっていないといけない。これを

$$\dot{f}_n = \{f_n, H\}_P + \{f_n, f_m\}_P \lambda^m \approx 0 \tag{49}$$

と表現しよう。$\approx$ は、拘束条件を代入した上で成り立つという意味である。しかし一般には、この式は単に未定乗数を決定する連立方程式になる場合もあれば、そうでない場合もある。すでに述べた QED においては後者であった。λ の係数行列 $\{f_n, f_m\}_P$ の rank を r とすれば、拘束条件を線形結合で適当に取り直して r 個の λ が決定される。このときに取り直した拘束条件を

$$g_\alpha, g_a \qquad (\alpha = 1, \cdots, r, \quad a = r+1, \cdots, l) \tag{50}$$

と表し、

$$\lambda^\beta = C^{\alpha\beta}\{g_\alpha, H\}_P \tag{51}$$

および

$$\{g_a, H\} \approx 0 \tag{52}$$

とする。ただし $C^{\alpha\beta}$ は定数である。さて、$l-r$ 個の式（52）の左辺がもしも f_n の線型結合で書けている場合にはこの式は満たされ新たな拘束条件はでてこない。しかしそうでなければ、式（52）の $\approx$ を $=$ で置き換えた新たな拘束条件を加える必要がある。この新たな拘束条件を、すでに知られている拘束条件に加え、同様にして時間発展を計算し、式（52）が既知の拘束条件の線形結合で書けているかどうか調べる。もし書けていないなら、さらに同じことを繰り返し、次々に拘束条件を得ていくことになる [*3] 。このようにして、最終的に M 個の拘束条件 g_α, g_a が得られ、未定乗数の係数行列 $\{g_a, g_b\}$ の rank が s であったとすると、s 個の未定乗数が決まることになり、また一方で全拘束条件 g に対して

$$\{g_\alpha, H''\}_P = c_\alpha^\beta g_\beta \tag{53}$$

が成り立つことになる。ここで c は線型結合の係数を意味する。またこの式は、これ以上拘束条件がでないために、その時間発展が $\approx$ でゼロになることによる。ただし Hamiltonian は新たに

$$H'' \equiv H + g_a\lambda^a - g_\alpha C'^{\alpha\beta}\{g_\beta, H\}_P \tag{54}$$

で再定義されている。C' は以前の C と同じ意味である。ここで、未定乗数の決まらない $M-s$ 個の拘束条件を**第一類拘束条件**、未定乗数が決まる s 個の拘束条件を**第二類拘束条件**という。

▶ Dirac 括弧と量子化 ◀

このようにして拘束条件を分類する意味は、拘束条件がある場合の正準形式による量子化の議論のさいに必要になる。

さて、話を簡単にするため、まずは第二類拘束条件のみであった場合を考える。第一類も含まれる際には、結局この場合に帰着するからである。まず、

$$\{F, F'\}_D \equiv \{F, F'\}_P - \{F, g_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{g_\beta, F'\}_P \tag{55}$$

[*3] これが無限自由度系において有限で終わるかどうかについてはよく知られていない。

を定義する。ただし $C^{\alpha\beta} \equiv (\{g^{\alpha}, g^{\beta}\}_P)^{-1}$ であり、これは **Dirac 括弧**といわれる。Pisson 括弧の場合には、任意の $F \approx 0$ に対して $[F, F']_P \approx 0$ が成り立つわけではないが、Dirac 括弧では成り立つ。というのも、単純に

$$\{g_{\alpha}, X\}_D \equiv \{g_{\alpha}, X\}_P - C^{-1}_{\alpha\gamma} C^{\gamma\beta} \{g_{\beta}, X\}_P = 0 \tag{56}$$

となるからである。したがって、拘束条件 $g_{\alpha} = 0$ で決まる部分位相空間 Γ^* を考えれば、ある物理量 $F_0(p, q)$ をとってきて、それに Γ^* 上で一致する物理量 F は

$$F - F_0 = c^{\alpha} g_{\alpha} \tag{57}$$

と書くことができる。そしてこれらは Γ^* 上で同じ Dirac 括弧を与える。この事実は、Dirac 括弧が、Γ^* 上での正準変数で定義される Poisso 括弧に一致することに起因する。量子化は、この Dirac 括弧を i 倍したものを交換関係、あるいは反交換関係として採用することになる。

第一類が含まれる場合には、未定乗数のうち決まらないものがあるわけだが、これは実はゲージの自由度に起因するものである。したがった、これらは自由に値をとることができるので、もしも未定乗数をすべて決めたければ人が手で条件を与える必要がある。この条件を**ゲージ固定条件**という。ゲージ固定条件により未定乗数がすべて決まるようにするには、ゲージ固定条件

$$\chi_{\alpha}(p, q) = 0 (\alpha = 1, \cdots, M - s) \tag{58}$$

が任意の時刻で成り立つ、すなわち

$$\dot{\chi} = \{\chi, H''\}_P + \{\chi, g_{\beta}\}\lambda^{\beta} \tag{59}$$

が残りの未定乗数を決定するということで、

$$\det\{\chi_{\alpha}, g_{\beta}\}_P \not\approx 0 \tag{60}$$

を要求する。この条件は、$\{g_{\alpha}, g_{\beta}\}_P \approx 0$ を考えれば、$\chi_{\alpha}, g_{\alpha}$ を並べた行列の行列式に対し

$$\det \left| \begin{pmatrix} \{\chi_{\alpha}, \chi_{\gamma}\}_P & \{\chi_{\alpha}, g_{\delta}\}_P \\ \{g_{\gamma}, \chi_{\beta}\}_P & \{g_{\beta}, g_{\delta}\}_P \end{pmatrix} \right| \approx (\det\{\chi_{\alpha}, g_{\beta}\}_P)^2 \not\approx 0 \tag{61}$$

を要請する。これはすなわち、ゲージ固定条件を含めた拘束条件全体が第二類拘束条件であることを意味する。このようにして、以降は第二類拘束条件の取扱と同様のことを行えばよい。

しかし後で述べるように、Lagrangian 密度の段階でゲージ固定を行えば、このような拘束条件の取扱におけるわずらわしさは解消される。しかしどのようにゲージ固定すればよいかはこの段階では不明である。ゲージ固定の方法は次節で述べることになる。

2　ゲージ場の経路積分量子化

2.1　拘束条件がある場合の経路積分表示

まず、経路積分量子化を議論するために、ゲージ固定条件を加えた場合の遷移振幅 $T \equiv \langle\, q_F, t_F \,|\, q_I, t_I \,\rangle$ の経路積分表示を求めておく。Γ^* 上での正準変数 p^*, q^* を用いて T を表示すると、以前の経路積分表示

を思い出せば

$$T=\int\mathcal{D}p^*\mathcal{D}q^*\exp\left[i\int dt(p^*\dot{q}^*-H^*(p^*,q^*))\right] \tag{62}$$

と書ける。ただし H^* は H を p^*,q^* で書き直したものである。

今、第一類拘束条件のみしかなく、それらが m 個ある場合を考えよう。互いに交換する第一類拘束条件 ${q'}_\alpha\equiv g_\alpha$ は座標変数としてとることができるから、その共役を ${p'}_\alpha$ として、全位相空間の正準座標を $p\equiv(p^*,p'),q\equiv(q^*,q')$ とできる。第一類拘束条件に応じてゲージ固定条件 χ_α が必要になるが、ゲージ固定条件を満たすときの p' の値を $\tilde{p}'$ として、ゲージ固定条件は

$$\chi(q^*,q'=0,p^*,p'=\tilde{p}'(q^*,p^*))=0 \tag{63}$$

と書ける。すると、T は全位相空間上の経路積分に書き直され、

$$\begin{aligned}
T&=\int\mathcal{D}p^*\mathcal{D}q^*\mathcal{D}p'\mathcal{D}q'\left[\prod_{\alpha=1}^{m}\delta({q'}_\alpha)\delta({p'}_\alpha-{\tilde{p}'}_\alpha(p^*,q^*))\right]\exp\left[i\int dt(p^*\dot{q}^*+p'\dot{q}'-H(p^*,p',q^*,q'))\right]\\
&=\int\mathcal{D}p\mathcal{D}q\left[\prod_{\alpha=1}^{m}\delta({q'}_\alpha)\delta({p'}_\alpha-{\tilde{p}'}_\alpha(p^*,q^*))\right]\exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right]\\
&=\int\mathcal{D}p\mathcal{D}q\left[\prod_{\alpha=1}^{m}\delta(g_\alpha)\delta(\chi_\alpha)\right]\left|\det\frac{\partial\chi_\beta}{\partial {p'}_\gamma}\right|\exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right]\\
&=\int\mathcal{D}p\mathcal{D}q\left[\prod_{\alpha=1}^{m}\delta(g_\alpha)\delta(\chi_\alpha)\right]|\det\{\chi_\beta,g_\gamma\}_P|\exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right]
\end{aligned}$$

とできる。第二類拘束条件がある場合には、第一類拘束条件が第二類拘束条件に帰着することを考えればよく、結果だけを述べると

$$T=\int\mathcal{D}p\mathcal{D}q\left[\prod_{\alpha}^{2m}\delta(g_\alpha)\right]\sqrt{|\det\{g_\beta,g_\gamma\}_P|}\exp\left[i\int dt(p\dot{q}-H(p,q))\right] \tag{64}$$

となる。ただし、第一類拘束条件はすべて第二類に帰着させられたものとして計算してある。また、すべてが第二類拘束条件であるということは、$\{g_\alpha,g_\beta\}_P$ が反対称行列であることを意味し、したがって拘束条件の数は偶数個でないといけないことで、$2m$ と書いている。

2.2 ゲージ場の経路積分量子化

▶ Coulomb ゲージ ◀

さて、以上のようにして一般的にゲージ場を考えてきたが、ここからは次のような形をしたゲージ場について考えていく：

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{a'\mu\nu}F_a^{\mu\nu}+\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\phi,D_\mu\phi) \tag{65}$$

ただし

$$F_{a'\mu\nu}=\partial_\mu A_{a'\nu}-\partial_\nu A_{a'\mu}+gf_{abc}A_{b'\mu}A_{c'\nu},\quad D_\mu=\partial_\mu-igT_aA_{a'\mu} \tag{66}$$

であり、f_{abc} は Lie 環の構造定数、T_a は Lie 環の基底である。また、接続が Lie 環の要素であることから $T_a A_{a'\mu}$ と書き改めてある。

一般にゲージ場はゲージ不変性のために拘束条件をもつが、それを固定するためにゲージ個定条件を課す。上記のゲージ場に対しては、QED のときと同様の計算を行う。まず、正準共役量の計算をすることで、拘束条件として

$$\pi_a^0(x) = 0 \tag{67}$$

がでてくる。このときの Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H} = \pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \mathcal{H}_\mathrm{m}(\pi_\phi, \phi, A_\mu^a) \tag{68}$$

となる。さらにこの Hamiltonian 密度に Lagrange の未定乗数を加えることで、この拘束条件の時間発展を考えると、

$$D_j \pi_a^j(x) - g\rho_a(x) = 0 \tag{69}$$

がでてくる。ここで

$$\rho_a \equiv \frac{\partial \mathcal{H}_\mathrm{m}}{\partial A_0^a} \tag{70}$$

であり。これらは第一類拘束条件であることも QED のときと同様である。したがって、第一類拘束条件のみしか現れてこない。これにたいし、

$$g_{1a} \equiv \pi_a^0 = 0 \to \chi_1^a \equiv A^{a0} = 0 \tag{71}$$

$$g_{2a} \equiv D_j \pi_a^j - g\rho_a = 0 \to \chi_2^a \equiv \partial_j A^{aj} = 0 \tag{72}$$

のようにしてゲージ固定条件を課す方法がよく用いられているが、これを **Coulomb ゲージ**という。

▶ 量子化 ◀

Coulomb ゲージをとったとして、T を具体的に表してみることにする。T の表式はすでに求めてあるので、これに拘束条件を代入すると、$\Delta_c[A](t) \equiv \det(\{g_{2a}, \chi_2^a\}_P|_{x_0=y_0=t})$ として

$$
\begin{aligned}
T = &\int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}A\mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a}\delta(\pi^{a0}(x))\delta(D_j\pi_a^j(x) - g\rho_a(x))\delta(A_0^a)\delta(\partial_j A^{aj}(x))\right] \\
&\times \left(\prod_t \Delta_c[A](t)\right)\exp\left[i\int d^4x(\pi_a^\mu\partial_0 A_\mu^a + \pi_\phi\partial_0\phi - H)\right] \\
= &\int \mathcal{D}\pi^i\mathcal{D}A^i\mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a}\delta(D_j\pi_a^j(x) - g\rho_a(x))\delta(\partial_j A^{aj}(x))\right] \\
&\times \left(\prod_t \Delta_c[A](t)\right)\exp\left[i\int d^4x(\pi_a^i\partial_0 A_i^a + \pi_\phi\partial_0\phi - H(A_0^a = 0, \pi^{a0} = 0))\right] \\
= &\int \mathcal{D}\pi^i\mathcal{D}A\mathcal{D}\pi_\phi\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a}\delta(\partial_j A^{aj}(x))\right] \\
&\times \left(\prod_t \Delta_c[A](t)\right)\exp\left[i\int d^4x(\pi_a^i\partial_0 A_i^a + \pi_\phi\partial_0\phi - H(A_0^a = 0, \pi^{a0} = 0) + (D_j\pi_a^j - g\rho_a)A_0^a)\right] \\
= &\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a}\delta(\partial_j A^{aj}(x))\right]\left(\prod_t \Delta_c[A](t)\right)\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right]
\end{aligned}
\tag{73}
$$

と計算できる。ただし、最後の等式では、指数に乗っている部分が π^i, π_ϕ について高々2 次式であることから Gauss 積分をして得られたものである。

これを、ゲージ場のない場合と比べてみると、ゲージ固定条件にともなう $\prod_{x,a}\delta(\partial_j A^{aj}(x))$ の項と、それによる $\prod_t \Delta_c[A](t)$ の 2 つの項が新たに加わっただけである。

2.3 Faddeev-Popov 行列式

経路積分表示（73）においてゲージ変換を行うと、作用積分の部分は変化しない。一方、ゲージ変換を行うことで、(A, ϕ) は変化する。そしてこのペア (A, ϕ) はゲージ変換を連続的に行うことで関数空間においてある軌跡を描く。これを**ゲージ軌跡**というが、もしもゲージ固定を行っていなければ、このゲージ軌跡に対して作用積分を足しあげていかなくてはならず、無限大の値を与えてしまう。つまり、式（73）の前にあるデルタ関数は、ゲージ固定を意味しているのである。また、その後ろの因子は、ゲージ固定による面とゲージ軌跡との交わる角度のようなもので、測度がそれぞれでことなることを意味している。それを一般的なゲージ固定条件でみていくことにしよう。

▶ 不変測度 ◀

まず、ゲージ固定条件を

$$\chi^a(A_\mu) = 0 \tag{74}$$

とする。この条件のもとで遷移振幅 T の計算を行いたいが、その準備として

$$\int \mathcal{D}U \prod_{x,a} \delta(\chi^a(A^U(x)))\Delta_\chi[A^U] \equiv 1, \quad \mathcal{D}U \equiv \prod_x dU(x) \tag{75}$$

で定義される量 $\Delta_\chi[A^U]$ を考察する。ただし、A^U は各ゲージ軌跡の代表元 A を U に関してゲージ変換したもので、上式はそのゲージ固定のデルタ関数を U について積分していったものであり、**不変測度**という。不変の意味は、ゲージ変換を余分に U' だけしたもので積分を行っても、

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}(UU') = \mathcal{D}(U'U) \tag{76}$$

のようにゲージ変換について不変であることにある。したがって、$\Delta_\chi[A^U] = \Delta_\chi[A]$ が成立する。また、$dU = d(U^{-1})$ という性質をもつ。

▶ ゲージ固定条件下における遷移振幅 T の一般式 ◀

量 $\Delta_\chi[A^U]$ の定義式を、Coulomb ゲージ固定条件での T の表式に挿入すると、

$$\begin{aligned} T = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}U & \left[\prod_{x,a} \delta(\partial_j A^{aj}(x))\right] \\ & \times \left[\prod_{x,a} \delta(\chi^a(A^U(x)))\right] \Delta_\chi[A] \left(\prod_t \Delta_c[A](t)\right) \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \end{aligned} \tag{77}$$

であるが、ゲージ変換 U^{-1} を行うことで、

$$\begin{aligned} T &= \int \mathcal{D}A^{U^{-1}}\mathcal{D}\phi^{U^{-1}}\mathcal{D}U^{-1} \left[\prod_{x,a} \delta(\partial_j A^{aj}(x))\right] \\ &\quad \times \left[\prod_{x,a} \delta(\chi^a(A(x)))\right] \Delta_\chi[A^{U^{-1}}] \left(\prod_t \Delta_c[A^{U^{-1}}](t)\right) \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \\ &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}U^{-1} \left[\prod_{x,a} \delta(\partial_j (A^{U^{-1}})^{aj}(x))\right] \\ &\quad \times \left[\prod_{x,a} \delta(\chi^a(A(x)))\right] \Delta_\chi[A] \left(\prod_t \Delta_c[A^{U^{-1}}](t)\right) \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \\ &= \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi \left[\int \mathcal{D}U \left[\prod_{x,a} \delta(\partial_j (A^U)^{aj}(x))\right] \left(\prod_t \Delta_c[A^U](t)\right)\right] \\ &\quad \times \left[\prod_{x,a} \delta(\chi^a(A(x)))\right] \Delta_\chi[A] \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \end{aligned} \tag{78}$$

が得られる。

さて、ここからの目的は、この式を Coulomb ゲージ固定によらない式に書き直したい。そのためには、$\Delta_\chi[A]$ を評価する必要がある。式（）を見れば分かるように、ゲージ固定条件のデルタ関数で書か

れているので、この付近での値で考えよう。U およびゲージ場 A^U はそれぞれ $\chi^a(A) = 0$ 付近で

$$U(x) \simeq 1 - ig\theta^a(x)T_a \tag{79}$$

$$(A^U)^a_\mu(x) \simeq A^a_\mu(x) + (D_\mu\theta)^a(x) \tag{80}$$

と近似できる。ただし、$\theta^a(x)$ は微小パラメータである。さらにゲージ固定条件は

$$\chi^a(A^U(x)) \simeq \chi^a(A(x)) + \int d^4y [M_\chi(x,y)]^a_b \theta^b(y) \tag{81}$$

のように行列 $M_\chi(x,y)$ を用いて表現しておく。ここで定義された $M_\chi(x,y)$ は、$\Delta_\chi[A]$ の定義式に上記の近似式を代入していけば $\det M_\chi = \Delta_\chi[A]$ が成立することが分かる。このように量 $\Delta_\chi[A]$ は行列式で表せるが、この量を **Faddeev-Popov 行列式**という。Coulomb ゲージ固定の場合には、

$$[M_c(x,y)]^a_b \equiv \partial_j(\delta^a_b\partial^j + gf^a_{bc}A^{cj}(x))\delta^{(3)}(x-y) \tag{82}$$

と計算される。Coulomb ゲージの場合にも同様に $\Delta_c[A]$ を定義すれば、$\Delta_c[A] = \det M_c$ が成立ち、

$$\int \mathcal{D}U \left[\prod_{x,a} \delta(\partial_j(A^U)^{aj}(x))\right] \left(\prod_t \Delta_c[A^U](t)\right) = 1 \tag{83}$$

となる。したがって、T の最終的な表式は

$$T = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a} \delta(\chi^a(A(x)))\Delta_\chi[A]\right] \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \tag{84}$$

となる。このようにして得られた経路積分表示はゲージ固定に依存しないことがわかる。

2.4 共変ゲージ固定と Faddeev-Popov ゴースト

ここからは、共変ゲージ固定を行った場合の摂動計算において便利な形に T を書き換えることを行う。以前のスカラー場や Dirac 場における摂動計算を思い出すと、T の形は基本的に exp の指数部に相互作用まで含めた Lagrangian と外場を含めた項を乗せられていて、それが Green 関数の生成汎関数となっていた。

まず、Coulomb ゲージではなく、相対論的に共変な形をしたゲージ固定条件を考える。相対論的に共変なゲージ固定条件の一例として、

$$\partial^\mu A^a_\mu(x) - \chi^a(x) = 0 \tag{85}$$

がある。この場合には、ゲージ固定条件付近で微小ゲージ変換を行えば

$$\partial^\mu(A^U)^a_\mu(x) \simeq \partial^\mu A^a_\mu(x) + \partial^\mu(D_\mu\theta)^a(x) \tag{86}$$

と書け、$\Delta_\chi[A] = \det(\partial^\mu D_\mu)$ が成り立つから、

$$T = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi \left[\prod_{x,a} \delta(\partial^\mu A^a_\mu(x) - \chi^a(x))\right] \det(\partial^\mu D_\mu) \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}\right] \tag{87}$$

となる。

次に、この得られた表式を摂動計算で扱いやすくするために補助場を導入する。補助場 $B^a(x)$ は

$$1=\int \mathcal{D}B\mathcal{D}\chi \exp\left[i\int d^4x\left\{\frac{\alpha}{2}B^a(x)B_a(x)+B^a(x)\chi_a(x)\right\}\right] \tag{88}$$

という恒等式を満たすことを用いて [*4] 、これを挿入すれば、

$$T=\int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\mathcal{D}\phi \det(\partial^\mu D_\mu)\exp\left(i\int d^4x\left(\mathcal{L}+\frac{\alpha}{2}B_aB^a+B_a\partial^\mu A^a_\mu\right)\right) \tag{92}$$

が成り立つ。ただし α は任意パラメータであり、B^a は **Nakanishi-Lautrup 場**という。

Faddeev-Popov 行列式 $\det(\partial^\mu D_\mu)$ は Grassmann 数による場、すなわち Fermi 統計に従う場 $c_a, \bar{c}_a$ を用いて

$$\det(\partial^\mu D_\mu)=\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\exp\left[i\int d^4x\, i\,\bar{c}^a(x)\partial^\mu D_\mu c_a(x)\right] \tag{93}$$

のように経路積分表示できる。ここで用いられた $c_a, \bar{c}_a$ は **Faddeev-Popov ゴースト**と呼ばれる。

このように、$B, c, \bar{c}$ のような場を用いることで、経路積分表示のすべてを exp の指数部に乗ることができ、スカラー場や Dirac 場の摂動論と同様の議論を行うことができるわけである。実際、この共変的ゲージにおける Green 関数の生成汎関数は

$$Z[J]=\int \mathcal{D}A\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\phi\exp\left[i\int d^4x(\tilde{\mathcal{L}}+J(\Phi)\right] \tag{94}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}\equiv\mathcal{L}+B_a\partial^\mu A^a_\mu+\frac{\alpha}{2}B^aB_a+i\bar{c}^a\partial^\mu D_\mu c^a \tag{95}$$

$$J(\Phi)\equiv J^\mu_a A^a_\mu+J^i\phi_i+\bar{J}_{c\,a}c^a+J^a_{\bar{c}}\bar{c}^a+J_{B\,a}B^a \tag{96}$$

のように書ける。ただし注意すべきは、T はゲージ固定条件によらないが、生成汎関数や Green 関数はゲージ固定に依存するものである。しかしこれは物理的には妥当であり、観測量に影響する量はゲージ固定によらない。

[*4] この等式については、以前に導いた汎関数積分における Gauss 積分の公式を使えばよい。しかし以前は汎関数積分を正確に定義していたわけではない。しかし正確な汎関数積分の定義はなく形式上のものであることが多い。今回の場合は、以前と同様に有限次元 Gauss 積分からの極限としてとらえると、汎関数積分は

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}df_j\equiv\int\mathcal{D}f \tag{89}$$

と定義しなければならない。しかし式（88）は $\mathcal{D}B$ と $\mathcal{D}\chi$ をそれぞれ独立に極限をとって得られるものではなく、

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dB_j\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_j\equiv\int\mathcal{D}B\mathcal{D}\chi \tag{90}$$

のように同時に極限をとらなければいけないことが、N 次元 Gauss 積分の公式

$$\int\prod_{i=1}^N dB_i d\chi_i\exp\left[-\frac{1}{2}B_jA^{jk}B_k+i\chi_jB^j\right]=\sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(A^{jk})}}\int\prod_{i=1}^N d\chi_i\exp\left[-\frac{1}{2}\chi_j(A^{-1})^{jk}\chi_k\right]=(2\pi)^N \tag{91}$$

をみれば分かる。