# 6. Perturbation Theory

―――――― 2008/08/15, Toshiya Namikawa

ABSTRACT

相互作用をして始状態から終状態へと遷移する確率振幅を与える公式である LSZ 簡約公式はすでに紹介した。その際、Green 関数を求めることが必要であった。今回は、相互作用が小さいと考えられる場合に使われる摂動論において、状態遷移確率や散乱断面積を計算するのに必要な Green 関数の計算規則を簡潔に表した Feynman 則をまず紹介し、もっと直接 S 行列の計算方法を与える Feynman 則を導出する。

## TABLE OF CONTENTS

**1 Feynman 伝播関数と摂動論** **1**
1.1 Feynman の伝播関数 . . . . . . . . 1

**2 生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係** **3**
2.1 自由スカラー場における生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係 . . . . . . . . 3
2.2 自由 Dirac 場における生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係 . . . . . . . . 4

**3 スカラー場の摂動論** **5**
3.1 Wick の定理と Green 関数の相互作用表示 . . . . . . . . 5
3.2 スカラー場 $\phi^4$ 理論での摂動論 . . . . . . . . 7
3.3 スカラー場の Feynman 図と Feynman 則 . . . . . . . . 9

**4 Dirac 場での摂動論** **15**

# 1 Feynman 伝播関数と摂動論

後で導出する Feynman 則のように摂動論の計算を簡潔に述べられる理由は、今から述べるように、自由場における Feynman の伝播関数の積で相互作用を表現できるからである。そこでまずは Feynman の伝播関数について述べる。

## 1.1 Feynman の伝播関数

量子力学において、演算子の積に対し未来の演算子ほど左に並べる、という操作を行うものを T 積と言った。場の量子論でも、場の演算子に対して同様の T 積が定義できる。実際、Heaviside の超関数 $\theta$ を用いて、スカラー場 $\phi$ に対し

$$T(\phi(x)\phi(y)) \equiv \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \tag{1}$$

と定義される。空間的に隔たった 2 つの場の演算子は交換するとすでに述べたので、上の定義から T 積は任意の慣性系で同じ積を与える。

ここで、Feynman 伝播関数

$$\Delta_F(x,y) \equiv \langle\, 0\, | T(\phi(x)\phi(y)) |\, 0\,\rangle \tag{2}$$

を定義する。このとき、実自由スカラー場に対しては

$$\Delta_F(x,y) = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^6 2\omega_{\boldsymbol{p}}} \{\theta(x^0-y^0)e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0-x^0)e^{ip(x-y)}\} \tag{3}$$

となるので、伝播関数は $x-y$ だけの関数となり、理論が平行移動に対して不変であることを示している。したがって、以降では Feynman 伝播関数 $\Delta_F(x,y)$ を $\Delta_F(x-y)$ と表記することにする。さらに Heaviside の超関数の複素積分表示

$$\theta(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, \frac{e^{-i\alpha t}}{\alpha + i\epsilon} \tag{4}$$

を用いると、

$$\Delta_F(x) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{5}$$

と表現できる。したがって、

$$K_m(x)G(x) = \delta^4(x) \tag{6}$$

となる関数 $G$ を用いれば、

$$\Delta_F(x) = iG(x) \tag{7}$$

と書ける。特に $G$ は Klein-Gordon 方程式の **Green 関数**と呼ばれる。また、式（5）は Lorentz 共変な形になっている。つまり、Feynman 伝播関数は Lorentz 不変である。Feynman 伝播関数のように Lorentz 共変な関数を一般に**不変 delta 関数**という。

複素スカラー場に対する Feynman 伝播関数も

$$\Delta_F(x,y) \equiv \langle\, 0\, | T(\phi(x)\phi^*(y)) |\, 0\,\rangle \tag{8}$$

のように定義され、自由な場合にはやはり同様のことが言える。

不変 delta 関数の例として、すでにでてきたものなら交換子関数 $\Delta(x)$ や、遅延 Green 関数

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x-x') \equiv -\theta(x^0 - x'^0)\Delta(x-x') \tag{9}$$

と先行 Green 関数

$$\Delta_{\mathrm{adv}} \equiv \theta(x'^0 - x^0)\Delta(x-x') \tag{10}$$

がある。前者は時間の前方に、後者は後方に伝播する場を表現している。これ以外にも、

$$\Delta_+(x-x') = \langle\, 0\, | \phi(x)\phi(x') |\, 0\,\rangle \tag{11}$$

や

$$\Delta_-(x-x') = \langle\, 0\, | \phi(x')\phi(x) |\, 0\,\rangle \tag{12}$$

を用いることもある。

Dirac 場の場合の Feynman 伝播関数は行列であり、

$$S_F(x,y)_{\alpha\beta} \equiv \langle\, 0\,| T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) |\, 0\,\rangle \tag{13}$$

$$\equiv \theta(x^0-y^0)\langle\, 0\,|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|\, 0\,\rangle - \theta(y^0-x^0)\langle\, 0\,|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|\, 0\,\rangle \tag{14}$$

と定義される。自由場の場合は、生成消滅演算子で表した式を用いて書き換えられ、

$$S_F(x,y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p}-m+i\epsilon} \tag{15}$$

となり、$\not{p}-m+i\epsilon$ の逆行列が含まれる。自由スカラー場と同様に $x-y$ にのみ依存するので、$S_F(x,y)$ を $S_F(x-y)$ と書くことにする。また、Dirac 微分演算子の Green 関数 $G_{\alpha\beta}$ を

$$(i\not{\partial}-m)^{\alpha\beta}G_{\beta\gamma}(x) = \delta^\alpha_\gamma\delta^4(x) \tag{16}$$

と定義すれば、$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = iG_{\alpha\beta}(x-y)$ であることが分かる。

以降では、とくに断らない限り Feynman 伝播関数は自由場で定義されたものとする。

# 2 生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係

## 2.1 自由スカラー場における生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係

相互作用のある場合の生成汎関数を求めるには、まず、自由スカラー場についてある程度計算をしておかないといけない。自由スカラー場の場合の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{17}$$

と書ける。ここでは自由スカラー場において、Green 関数の生成汎関数を Feynman の伝搬関数で書けることをみることにする。生成汎関数の経路積分表示を使うと

$$\frac{Z_f[J]}{Z_f[J=0]} = \frac{1}{Z_f[J=0]}\int \mathcal{D}\,\phi\exp\left[i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi\right\}\right] \tag{18}$$

$$= \frac{1}{Z_f[J=0]}\int \mathcal{D}\,\phi\exp\left[i\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\phi K_m(x)\phi + J\phi\right\}\right] \tag{19}$$

$$= \frac{1}{Z_f[J=0]}\int \mathcal{D}\,\phi\exp\left[i\int d^4x\,J(x)\phi(x) + \int d^4x\,d^4y\,\phi(x)iK_m(x)\delta^4(x-y)\phi(y)\right] \tag{20}$$

$$= \exp\left[\frac{-1}{2}\int d^4x\,d^4yJ(x)K^{-1}(x,y)J(y)\right] \tag{21}$$

と書ける。ここで $K^{-1}$ は、$K(x,y) \equiv -iK_m(x)\delta^4(x-y)$ として

$$\int d^4y\,K(x,y)K^{-1}(y,z) = \delta^4(x-z) \tag{22}$$

のように定義される関数である。また、$N$ 次元 Gauss 積分の公式

$$\Gamma[N,B] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} d\phi^j \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} \phi^j A_{jk}\phi^k + \sum_{j=1}^{N} B_j\phi^j\right] \tag{23}$$

$$= \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(A)}} \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} B^j A^{-1}_{jk} B^k\right] \tag{24}$$

から、$N \to \infty$ により

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\Gamma[N,B]}{\Gamma[N,B=0]} = \lim_{N\to\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} B^j A^{-1}_{jk} B^k\right] \tag{25}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, B(x)A^{-1}(x,y)B(y)\right] \tag{26}$$

を用いた。ここで、$A^{-1}$ は、

$$\int d^4y\, A(x,y)A^{-1}(y,z) = \delta^4(x-z) \tag{27}$$

として定義される関数である。

さらに、$K^{-1}$ が Feynman 伝搬関数 $\Delta_F$ に等しいことは、生成汎関数を $J$ で 2 回汎関数微分することにより

$$\Delta_F(x-y) = \langle\, 0\,|T(\phi(x)\phi(y))|\,0\,\rangle = -\frac{1}{Z_f[J=0]}\frac{\delta^2 Z_f[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}\bigg|_{J=0} = K^{-1}(x,y) \tag{28}$$

から分かる。したがって、

$$\frac{Z_f[J]}{Z_f[J=0]} = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \tag{29}$$

である。このようにして、自由スカラー場に対する生成汎関数は Feynman 伝搬関数を用いて書くことができた。

## 2.2 自由 Dirac 場における生成汎関数と Feynman 伝搬関数の関係

さらに自由 Dirac 場においても、Green 関数の生成汎関数を求め、Feynman 伝搬関数との関係を求める。自由 Dirac 場に対しても、自由スカラー場と同様に生成関数の経路積分表示を求めることができる。自由 Dirac 場の生成汎関数は、Grassmann 数 $\eta, \bar{\eta}$ を用いて

$$Z_f[\eta,\bar{\eta}] \equiv N\int \mathcal{D}\,\bar{\psi}\mathcal{D}\,\psi \exp\left[i\int d^4x\{\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\}\right] \tag{30}$$

$$= \langle\, 0\,|T\exp\left[i\int d^4x\{\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\}\right]|\,0\,\rangle \tag{31}$$

と表される。また、Feynman 伝搬関数 $S_F$ との関係は

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = N\int \mathcal{D}\,\bar{\psi}\mathcal{D}\,\psi \exp\left[i\int d^4x\{(\bar{\psi} + \bar{\eta}S_F)S_F^{-1}(\psi + S_F\eta) - \bar{\eta}S_F\eta\}\right] \tag{32}$$

$$= N' \exp\left[-i\int d^4x\, d^4y\, \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right] \tag{33}$$

となる。したがって、自由 Dirac 場においても自由スカラー場と同様に Feynman の伝搬関数で表せた。

# 3　スカラー場の摂動論

最初に、すでに導いた自由場の場合の生成汎関数から、相互作用場を取り入れた場合の生成汎関数へと移行し、Feynman の伝播関数で表せることを説明する。そしてそれをもとに Green 関数を求め、相互作用が小さいとした場合の摂動論を展開する。最後に、Feynman 則について述べる。

## 3.1　Wick の定理と Green 関数の相互作用表示

簡単のため、相互作用する Lagrangian 密度として、スカラー場 $\phi$ のみの相互作用

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_f(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) \tag{34}$$

を考える。このとき、Green 関数の生成汎関数は

$$Z[J] = N\int \mathcal{D}\,\phi \exp\left[i\int d^4x\{\mathcal{L}_I + \mathcal{L}_f + J(x)\phi(x)\}\right] \tag{35}$$

$$= N\int \mathcal{D}\,\phi \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_I\right]\exp\left[i\int d^4x\{\mathcal{L}_f + J(x)\phi(x)\}\right] \tag{36}$$

$$= \exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta\,J(x)}\right)\right] Z_f[J] \tag{37}$$

で与えられる。これは自由場の生成汎関数を汎関数微分して相互作用場の生成汎関数を得ることを意味している。

さて、いままでは自由場であったので Heisenberg 描像で計算してきているが、相互作用が入る場合を考えなければいけないので、相互作用描像で考えることになる。というのは、式（37）において、$Z_f$ 内の演算子は自由場の場合の演算子としておくとそのまま自由場での生成汎関数として扱えるからである。相互作用描像では、場の演算子は自由場の Heisenberg 方程式、つまり Klein-Gordon 方程式に従う。

先ほどの自由場から相互作用場を取り入れて経路積分の変形を行ったときは、演算子形式としての変更は行っていないが、以降での計算は、まず自由場での計算を行ってから相互作用項の低い次数を徐々に取り入れていくという方法を用いるので、描像としては演算子形式を相互作用描像に変えることになる。したがって、以降では演算子を相互作用表示であることを示すために添字 $I$ をつけておく。

### ▶ スカラー場での生成汎関数に対する場の汎関数微分表示 ◀

式（37）のままでは相互作用に汎関数微分がくっついているので、これを展開して計算するのは見通しが悪い。そこで、ここでは $Z[J]$ に対し、$J(x)$ の汎関数微分による表示ではなく、新たな関数 $\Phi(x)$ による汎関数微分表示をするための計算を行う。関係式

$$J(x_1)\cdots J(x_n) = (-i)^n\left(\frac{\delta}{\delta\,\Phi(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\,\Phi(x_n)}\exp\left[i\int d^4u\,J(u)\Phi(u)\right]\right)\Bigg|_{\Phi=0} \tag{38}$$

を使うと、

$$Z[J]=N'\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\exp\left[\frac{-1}{2}\int d^4y\,d^4z\,J(y)\Delta_F(y-z)J(z)\right] \tag{39}$$

$$\begin{aligned}&=N'\exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\\&\quad\times\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,d^4z\frac{\delta}{\delta\Phi(y)}\Delta_F(y-z)\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\right]\exp\left[i\int d^4u\,J(u)\Phi(u)\right]\right)\Bigg|_{\Phi=0}\end{aligned} \tag{40}$$

$$=N'\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,d^4z\frac{\delta}{\delta\Phi(y)}\Delta_F(y-z)\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\right]\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}_I(\Phi)+J(x)\Phi(x))\right]\right)\Bigg|_{\Phi=0} \tag{41}$$

と書き直せる。

## ▶ Wick の定理 ◀

ここで、一般に $O[\Phi]$ に式（41）の第１因子を作用させると

$$\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,d^4z\frac{\delta}{\delta\Phi(y)}\Delta_F(y-z)\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\right]O[\Phi]\right)\Bigg|_{\Phi=0}={}_I\langle\,0\,|T(O[\phi_I])|\,0\,\rangle_I \tag{42}$$

となることが知られている。これを使えば、

$$G^{(2)}(x_1,x_2)=\langle\,0\,|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|\,0\,\rangle=\Delta_F(x_1-x_2) \tag{43}$$

$$=\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,d^4z\frac{\delta}{\delta\Phi(y)}\Delta_F(y-z)\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\right]\Phi(x_1)\Phi(x_2)\right)\Bigg|_{\Phi=0} \tag{44}$$

$$={}_I\langle\,0\,|T(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2))|\,0\,\rangle_I\equiv G_I^{(2)}(x_1,x_2) \tag{45}$$

であるから、Heisenberg 表示において定義しておいた 2 点 Green 関数 $G^{(2)}$（すなわち Feynman の伝搬関数 $\Delta_F$）は相互作用表示のものに置き換えて定義した相互作用 2 点 Green 関数 $G_I^{(2)}$ と変わらない。さらに

$$G_I^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\equiv{}_I\langle\,0\,|T(\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n))|\,0\,\rangle_I \tag{46}$$

$$=\left(\exp\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,d^4z\frac{\delta}{\delta\Phi(y)}\Delta_F(y-z)\frac{\delta}{\delta\Phi(z)}\right]\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\right)\Bigg|_{\Phi=0} \tag{47}$$

$$=\sum\Delta_F(x_{i_1}-x_{j_1})\cdots\Delta_F(x_{i_n}-x_{j_n})\qquad(n\ \text{偶数}) \tag{48}$$

$$=0\qquad(n\ \text{奇数}) \tag{49}$$

となる。つまり、第１因子は、2 つの $\Phi$ があれば、それらを Feynman 伝搬関数でつなぐという操作を表している。このように $n$ が偶数のときは Feynman 伝搬関数のあらゆる組合せで書ける。また、$n$ が奇数であれば自由場の $n$ 点 Green 関数は 0 を与える。これを **Wick の定理**という。

### ▶ 摂動論 ◀

式（41）に式（42）を用いると、Green 関数の生成汎関数として

$$\frac{Z[J]}{Z[J=0]} = \frac{{}_I\langle 0\,|T\exp\left[i\int d^4x\{\mathcal{L}_I(\phi_I)+J(x)\phi_I(x)\}\right]|\,0\,\rangle_I}{{}_I\langle 0\,|T\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_I(\phi_I)\right]|\,0\,\rangle_I} \tag{50}$$

が得られる。この式（50）を $J$ で汎関数微分して得られる関数は Heisenberg 表示での $n$ 点 Green 関数であるから、

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{{}_I\langle 0\,|T\left(\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\left\{\exp\left(\int d^4y_j\, i\mathcal{L}_I(\phi_I(y_j))\right)\right\}\right)|\,0\,\rangle_I}{{}_I\langle 0\,|T\left(\exp\left[i\int d^4x\,\mathcal{L}_I(\phi_I)\right]\right)|\,0\,\rangle_I} \tag{51}$$

となる。この $G$ を計算することで LSZ 簡約公式を用いて S 行列を計算することができ、ある状態から別の状態への遷移確率振幅の計算ができるようになった。また後でみるように、S 行列が計算できると単位時間あたりの遷移確率や散乱断面積を計算することができる。

しかし式（51）自体を解析的に計算できる場合はまずないといっていい。したがって、**相互作用が十分小さい**として近似計算を行うのが普通である。これは**摂動論**と呼ばれる計算方法である。相互作用が小さいと考えれば、式（51）は

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{{}_I\langle 0\,|T\left(\phi_I(x_1)\cdots\phi_I(x_n)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\int d^4y_j\, i\mathcal{L}_I(\phi_I(y_j))\right\}\right)|\,0\,\rangle_I}{{}_I\langle 0\,|T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\int d^4y_j\, i\mathcal{L}_I(\phi_I(y_j))\right)|\,0\,\rangle_I} \tag{52}$$

のように展開して考えることができる。

## 3.2　スカラー場 $\phi^4$ 理論での摂動論

ここでは、具体的に $\phi^4$ 理論における S 行列を計算し、具体的にどのようにして摂動論的手法が使われるか見ていく。状況設定として、運動量 $p_1, p_2$ の粒子が相互作用し、運動量 $p_3, p_4$ になったとする。つまり、S 行列として

$$S = \langle\, p_3, p_4\, out\,|\, p_1, p_2\, in\,\rangle \tag{53}$$

の遷移確率の計算を行う。この S 行列を計算するには 4 点 Green 関数を求めるが、摂動論の方法を用いて計算することにする。相互作用 Lagrangian 密度として

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{24}\lambda\phi^4 \tag{54}$$

を考える。

### ► 0 次の摂動 ◄

まず $\lambda$ が十分小さいとして、$\lambda$ に関して $G^{(4)}$ の摂動展開を行うと、0 次の項は、

$$G_0^{(4)} = {}_I\langle 0 | T(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)) | 0 \rangle_I \tag{55}$$
$$= \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta(x_2 - x_3) \tag{56}$$

と書ける。ただし、Wick の定理を用いて Feynman の伝搬関数に置き換えているが、この操作を**縮約**という。これを用いて S 行列を計算するが、LSZ 簡約公式

$$S_0 = \prod_{i=1,2}\left(i\int d^4x_i\, e^{ip_ix_i}K_m(x_i)\right)\prod_{j=3,4}\left(i\int d^4x_j\, e^{ip_jx_j}K_m(x_j)\right)G_0^{(4)} \tag{57}$$

における、$G_0^{(4)}$ の前についている因子を **LSZ 因子**といい、計算では Feynman 伝搬関数に LSZ 因子を作用させていくことになる。ここで新たに作用 $\hat{K}_\pm(p,x)$ を

$$\hat{K}_\pm(p,x) = i\int d^4x\, e^{\pm ipx}K_m(x) \tag{58}$$

と定義すると、式（57）は

$$S_0 = \left[\prod_{i=1,2}\hat{K}_+(p_i,x_i)\prod_{j=3,4}\hat{K}_-(p_j,x_j)\right]G_0^{(4)} \tag{59}$$

と書き直せるので、$S_0$ を求めるには、Feynman 伝搬関数に $\hat{K}$ を作用させたときの式をあらかじめ計算しておくと便利である。実際に計算をしておくと、Feynman 伝搬関数が Klein-Gordon 方程式の Green 関数の $i$ 倍であったことを思い出せば、

$$\hat{K}_\pm(q,y)\hat{K}_\pm(p,x)\Delta_F(x-y) = \hat{K}_\pm(q,y)i\int d^4x\, e^{\pm ipx}K_m(x)\Delta_F(x-y) \tag{60}$$
$$= \hat{K}_\pm(q,y)i\int d^4x\, e^{\pm ipx}(-i)\delta^4(x-y) \tag{61}$$
$$= \hat{K}_\pm(q,y)e^{\pm ipy} \tag{62}$$
$$= i\int d^4y\, e^{\pm iqy}K_m(y)e^{\pm ipy} \tag{63}$$
$$= i\int d^4y\, e^{\pm iqy}(-p^2+m^2)e^{\pm ipy} \tag{64}$$
$$= 0 \tag{65}$$

である。ただし、質量 $m$ の自由スカラー粒子がそのまま通過するということから $p^2 = m^2$ が成り立つので、最後に 0 となった。

これを使えば、式（59）から

$$S_0 = 0 \tag{66}$$

であることが分かる。

**▶ 1 次の摂動 ◀**

次に $S$ の $\lambda$ に対する 1 次の摂動を計算する。Green 関数の式（52）の分子分母を $\lambda$ で展開して、そのオーダーを $O, O'$ とすると

$$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{O(\lambda^0)+O(\lambda^1)+\cdots}{1+O'(\lambda^1)+\cdots} \tag{67}$$

$$= O(\lambda^0)+O(\lambda^1)+O(\lambda^0)O'(\lambda^1)+\cdots \tag{68}$$

であるから、$\lambda$ の 1 次までの摂動では $O(\lambda^1)+O(\lambda^0)O'(\lambda^1)$ の項を考えなければいけない。しかし、0 次の摂動において、これに LSZ 因子を作用すれば第 2 項は消えるので、結局分子の $\lambda$ の 1 次のオーダー $O(\lambda^1)$ を考えればよいことになる。これを $G_1^{(4)}$ と書くことにすれば

$$G_1^{(4)} = {}_I\langle 0\,|T\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)(-i)\int d^4y\,\phi^4(y)\right)|\,0\,\rangle_I \tag{69}$$

$$= -i{}_I\langle 0\,|T\left(\int d^4y\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\phi(y)\right)|\,0\,\rangle_I \tag{70}$$

である。これをさらに Feynman の伝搬関数に縮約したいが、0 次での計算から分かるように、$x_i, x_j$ を互いに縮約した項はすべて LSZ 因子を作用させることで 0 になる。したがって、0 とならない可能性のある項は、縮約として $(x_1,y),(x_2,y),(x_3,y),(x_4,y)$ のペアのみであり、これは 24 通りある。したがって、この項のみを取り出せば、式（70）は

$$G_1^{(4)} = 24\frac{-i\lambda}{24}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y) \tag{71}$$

である。これに LSZ 因子を作用させると、式（62）から

$$S_1 = -i\lambda\int d^4y\,e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)y} \tag{72}$$

$$= -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \tag{73}$$

が得られる。

## 3.3 スカラー場の Feynman 図と Feynman 則

この小節では、スカラー場に対する Feynman 図と Feynman 則について説明を行う。まず、例えば 4 点 Green 関数の分子の 2 次のオーダーを考慮すると、

$$\frac{1}{2}{}_I\langle 0\,|T\left(\int d^4y\,d^4z\,\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\frac{-i\lambda}{24}\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\frac{-i\lambda}{24}\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\right)|\,0\,\rangle_I$$

である。ここで $\phi_I(x_j)$ を**外場**、$\phi_I(y),\phi_I(z)$ のように積分変数が入っているものを**内場**ということにする。縮約をとる場合、外場と内場でとったものを**外線**、内場どうしでとったものを**内線**、外場どうしでとったものを**素通り**ということにする。

これをまともに摂動計算すると非常に面倒であり、分母の寄与も考慮しなければいけない。そこで、以下のように Feynman 図というものを導入する。

## ▶ Feynman 図 ◀

以下では伝搬関数が与えられたときに、それをどのような図形に対応させるか定義していく。まず、$x_j$ のように添字のついたものは積分変数ではなく、**外点**ということにする。一方 $y, z$ のように、添字がついていないものは積分変数とし、**頂点**ということにする。伝搬関数として $\Delta_F(x_1 - x_2)$ や $\Delta_F(y - z)$ というものがあれば、これをそれぞれ

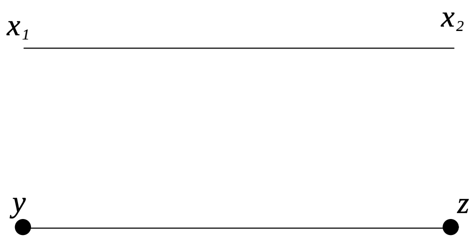


FIG 1: 上の図は $\Delta_F(x_1 - x_2)$、下の図は $\Delta_F(y - z)$ に対応する。

という図形に対応させる。

また、積 $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)=\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(y-x_2)$ なら

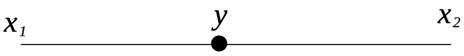


FIG 2: $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)$ に対応する図。

さらに $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)=\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(y-x_3)\Delta_F(y-x_4)$ なら

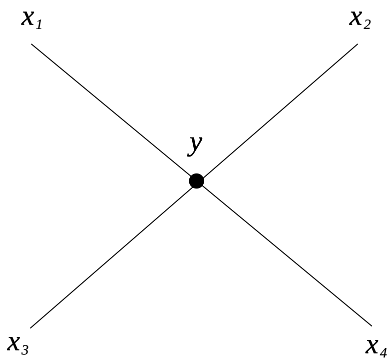


FIG 3: $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)$ に対応する図。

のように対応させていく。この図形は素通りを含まず 4 点すべてと結びついている。一般に $n$ 個の外点が与えられて、それらすべてと連結している場合には ***n* 点連結グラフ**という。したがって、4 点 Green 関数を考えている限り、この図は連結グラフである。

さらに、$\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(y-y)\Delta_F(x_2-y)$ は

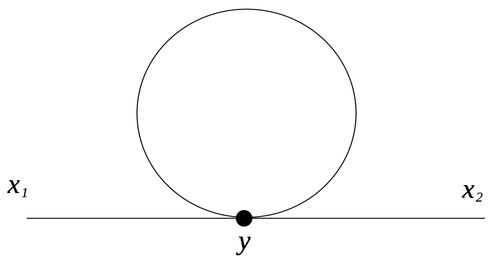


FIG 4: $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(y-y)\Delta_F(x_2-y)$ に対応する図。

のように対応させる。このうち同じ点どうしの縮約 $\Delta_F(y-y)$ は図の形からも想像できるように**ループ**という。一般に、一周回ってもとにもどる内線があるとき、それをループということにしよう。

他にも、分離した図の例として、$\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(y-y)$ なら

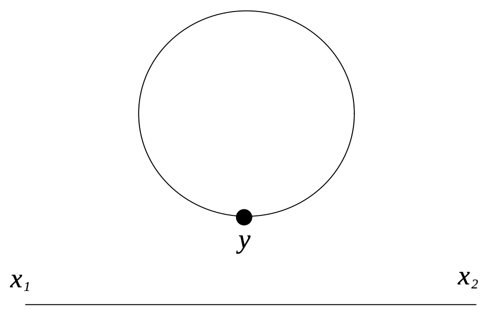


FIG 5: $\Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(y-y)$ に対応する図。

であり、これひとつで図とみなす。ここで $\Delta_F(y-y)$ に対応する図形は外点 $x_1, x_2$ と連結していない。このように外点と連結していないグラフを**真空泡グラフ**という。

以上のように定義された図を**位置表示による Feynman 図**ということにしよう。

## ▶ 真空泡グラフ ◀

真空泡グラフを含む項の寄与を考える。真空泡グラフを生成するものは、外点と連結していない Green 関数の表式の分母 $Z[J=0]$ である。一方、分子では、真空泡グラフの生成部分と連結グラフの生成部分の積になっている。したがって、Feynman 図を考慮して考える場合には、真空泡グラフは無視して考えられる。

## ▶ スカラー場 $\phi^4$ 理論の Feynman 則 ◀

以上の結果をまとめると、次のような規則で S 行列の摂動を計算する際の Green 関数を求めることができる。その規則とは

1. 考えられるだけの Feynman 図を書く。その際、$n$ 点 Green 関数なら $n$ 個の外点があり、$m$ 次の摂動であれば $m$ 個の頂点がある。
2. 各線に対し Feynman 伝搬関数を対応させる。そしてそれらの積をとる。
3. 頂点 $y_m$ の数だけ頂点因子（今回は相互作用の形から $-i\lambda\int d^4y_m$）をかける。
4. その Feynman 図に対する対称性の数をかける。

これらは**位置表示の Feynman 則**といわれる。しかし、Feynman 伝搬関数の運動量表示を用いるともっと簡単になる。こちらのほうを通常は **Feynman 則**という。

### ▶ 運動量空間の Feynman 則 ◀

あらかじめ Feynman 伝搬関数を

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{74}$$

と書いておく。Wick の定理から、Green 関数は真空泡グラフを無視した場合の Feynman 図における Feynman 伝搬関数の積でかけるので、これに LSZ 因子を作用させて、外線 $\Delta_F(x_s - y)$ なら

$$\left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right] \Delta_F(x_s - y) \tag{75}$$

$$= i \int d^4x_s\, e^{\pm ip_s x_s} K_m(x_s) \Delta_F(x_s - y) \left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right]\Bigg|_{i,j\neq s} \tag{76}$$

$$= i\, e^{\pm p_s y} \left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right]\Bigg|_{i,j\neq s} \tag{77}$$

であり、内線 $\Delta_F(y - z)$ なら

$$\left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right] \Delta_F(y - z) \tag{78}$$

$$= \Delta_F(y - z) \left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right] \tag{79}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(y-z)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\prod_{i=1}^{k} \hat{K}_+(p_i, x_i) \prod_{j=1}^{l} \hat{K}_-(p_j, x_j)\right] \tag{80}$$

である。また、素通りなら 0 であった。

式（80）で $y = z$ のような場合、つまり一つの頂点を含んだループの場合は、

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \times (\text{LSZ 因子}) \tag{81}$$

と書ける。

複数の頂点を通り一周するループも連結な Feynman 図に含まれる。簡単なのは $\Delta_F(y_1 - y_2)\Delta_F(y_2 - y_1)$

が伝搬関数の積に含まれている場合である。このときは、式（80）から

$$
\begin{aligned}
&\text{（LSZ 因子）} \times \Delta_F(y_1 - y_2)\Delta_F(y_2 - y_1) && (82)\\
&= \Delta_F(y_1 - y_2)\Delta_F(y_2 - y_1) \times \text{（LSZ 因子）} && (83)\\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(y_1-y_2)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(y_2-y_1)} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \times \text{（LSZ 因子）} && (84)\\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-i(p-q)y_1} e^{-i(p-q)y_2} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \times \text{（LSZ 因子）} && (85)
\end{aligned}
$$

のように書ける。これからさらに $y_1, y_2$ で積分してみると $\delta^4(p-q)$ が 2 回でてくることが分かる。これは、頂点 $y_1, y_2$ のそれぞれで運動量が保存していることを示す。実際には、S 行列を求める際にこのような積分を行わなければいけないが、ループになっている場合には、積分するとデルタ関数がでてくることが分かった。さらに複数の頂点を通って一周するループの場合にも、各頂点において運動量保存の意味のデルタ関数がでてくる。

以上のことをふまえて、位置座標の Feynman 則をもっと便利な形に変えよう。Green 関数を求めるには、頂点 $y_j$ に対して積分を行わなければいけないが、伝搬関数に先に LSZ 因子をかけてから積分してもよい。したがって、すべての伝搬関数に先に LSZ 因子をかけてから積分を作用させることを考える。Feynman 図は、外線、内線で構成されているから、でてくる項は式（77）と式（80）の LSZ 因子を除いた部分の積になっているはずである。さらにループの場合の計算から、連結な Feynman 図による寄与は

$$
S = \sum_{\text{conect}} W \prod_{j=1}^{n} \int dy_j \frac{-i\lambda}{24} \left[ \prod_{\text{頂点 } j \text{ からの内線 } i} \int \frac{d^4p_{i_j}}{(2\pi)^4} e^{-ip_{i_j}(y_{j_i} - {y'}_{j_i})} \frac{i}{p_{i_j}^2 - m^2 + i\epsilon} \right] i \exp\left\{ y_j \sum_{e_j} p_{e_j} \right\} \tag{86}
$$

$$
= \sum_{\text{conect}} W \left( \frac{-i\lambda}{24} \right)^n \prod_{j=1}^{n} \left[ \prod_{\text{頂点 } j \text{ からの内線 } i} \int \frac{d^4p_{i_j}}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_{i_j}^2 - m^2 + i\epsilon} \delta^4\left( \sum_{s_j\ (s=e,i)}^{n} p_{s_j} \right) \right] \tag{87}
$$

の形に書ける。ただし、頂点が $n$ 個あるとした。つまり、ある Feynman 図に対する S 行列への寄与を、上式を使えば以下のように翻訳できる：

1. 外線にはすでに与えられた運動量を与え、Feynman 図の内線にはひとつひとつに運動量 $p_{i_j}$ を定める。さらに内線には、式
$$
\frac{i}{p_{i_j}^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{88}
$$
を対応させ、すべてを掛け合わせる。ここで、添字の $j$ は、$j$ 番目の頂点からでる内線という意味である。

2. 各頂点 $j$ において流入する運動量 $p_j$ と流出する運動量 $q_j$ に対し保存則が成り立つという意味で、$(2\pi)^4\delta^4(p_j - q_j)$ をかける。

3. 与えられた運動量以外の運動量、すなわち $p_{i_j}$ に対し、
$$
\int \frac{d^4p_{i_j}}{(2\pi)^4} \tag{89}
$$
をかけて積分する。

4. 頂点の数だけ（今回は相互作用の形から $-i\lambda/24$）をかける。

5. 入れ換え可能で同じ Feynman 図を与える場合を考慮して、その組合せ数 $W$ をかける。

これを**運動量空間における Feynman 則**という。ここで注意するべき点は、位置表示にはなかった運動量を Feyman 図の線ひとつひとつに与えて描かなければいけないことである。運動量表示における Feynman 図を、通常は **Feynman 図**と呼ぶが、その例として以下のようなものを挙げておこう。

運動量 $p_1, p_2$ の粒子が入射し、それが終状態では $p_3, p_4$ で観測されるという状況設定行うと、$\lambda$ の一次でゼロを与えないものはまさに図 3 であり、これを Feynman 図として

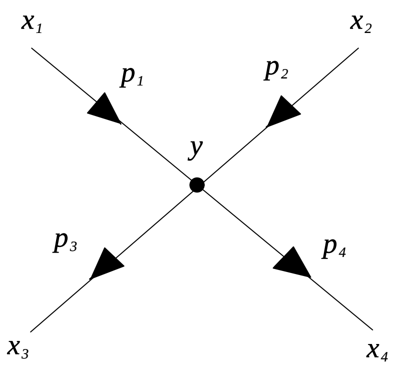


FIG 6: $\Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)$ に対応する図。この図から、頂点 $y$ に流入する運動量は $p_1+p_2$ であり、流出する運動量は $p_3+p_4$ である。

のように書く。このようにして、運動量の向きを考慮に入れ、頂点で保存則が成り立つようにデルタ関数 $(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$ をかけるのである。その結果、S 行列の $lamnda$ に関する一次の項は、上記の Feynman 則を用いて

$$S_1 = 24\frac{-i\lambda}{24}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3-p_4) = -i\lambda(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3-p_4) \tag{90}$$

が簡単に得られ、まさに式（73）そのものである。

しかし実際には発散する項がでてくる。実際、式（81）はそのまま積分すると発散するが、それは**くりこみ**という操作で発散をうまく処理することができるので、くりこみにおいて詳しくみることにする。

# 4 Dirac 場での摂動論

スカラー場と同様に、Dirac 場に対しても、$n$ 点 Green 関数の生成汎関数を、Grassmann 数の関数 $\Psi$ を用いて書き直せる。$\Psi$ による汎関数微分を

$$\exp\left[-\int d^4y\, d^4z \frac{\delta}{\delta\,\Psi(y)} S_F(y-z) \frac{\delta}{\delta\,\bar{\Psi}(z)}\right] O(\Psi,\bar{\Psi})\Bigg|_{\Psi=\bar{\Psi}=0} = {}_I\langle\, 0\,| T(O[\psi_I,\bar{\psi}_I])|\, 0\,\rangle_I \tag{91}$$

として導入すると、自由 Dirac 場の場合には

$$Z_f[\eta,\bar{\eta}] = N\exp\left[-\int d^4y\, d^4z \frac{\delta}{\delta\,\Psi(y)} S_F(y-z) \frac{\delta}{\delta\,\bar{\Psi}(z)}\right] \exp\left[i\int d^4x\{\bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta\}\right]\Bigg|_{\Psi=\bar{\Psi}=0} \tag{92}$$

となり、相互作用場を含む場合には

$$\frac{Z[\eta,\bar{\eta}]}{Z[\eta=\bar{\eta}=0]} = \frac{1}{Z[\eta=\bar{\eta}=0]} \exp\left[i\int d^4x \mathcal{L}_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\bar{\eta}}, \frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\eta}\right) Z_f[\eta,\bar{\eta}]\right] \tag{93}$$

$$= \frac{{}_I\langle\, 0\,|T\left(\exp\left[i\int d^4x\{\mathcal{L}_I(\psi_I,\bar{\psi}_I) + \bar{\eta}\psi_I + \bar{\psi}_I\eta\}\right]\right)|\, 0\,\rangle_I}{{}_I\langle\, 0\,|T\left(\exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_I(\psi_I,\bar{\psi}_I)\right]\right)|\, 0\,\rangle_I} \tag{94}$$

と書ける。これから $n$ 点 Green 関数を求めることができ、スカラー場の場合と同様に散乱断面積などの計算をすることができる。しかし Dirac 場の場合も同様に摂動論で計算を行わないといけない。

また、Dirac 場に対する Feynman 則も変更を受ける。というのは、Dirac 場に対する Feynman 伝搬関数 $S_F$ に対し

$$\frac{i}{\not{p}_i - m + i\epsilon} = \int d^4x\, e^{ipx} S_F \tag{95}$$

となるからである。Dirac 場の内線に対しては

$$\frac{i}{\not{p}_i - m + i\epsilon} = i\frac{m + \not{p}_i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{96}$$

を代わりに使うことになり、外線に関してはスピノル場 $u, v$ を因子とする。ただし反粒子の場合は $\bar{u}, \bar{v}$ である。さらにもうひとつ変更点があるのは、２つの頂点を結んだループに対しては $-1$ の因子をつける必要がある。これは、Fermion について言えることだが、反交換関係をとっているためである。