# 5. Path Integral Quantization

2008/08/12 Toshiya Namikawa

ABSTRACT

場の量子化の数学的に厳密な方法は正準量子化である。しかしここであえて経路積分量子化について紹介するのは、場の理論における対称性を見通しやすくすること、また、拘束条件をもつゲージ場の量子化を行う際には正準量子化よりも容易に量子化できるからである。さらに、Feynman による Feynman 則の導出を紹介するためにも必須となる。

今回は、まず最初に量子力学における経路積分について復習する。そのあとは経路積分量子化の一般論と、Green 関数の生成汎関数について述べる。また、直接今回は必要がないが、Dirac 場の経路積分量子化では特別な代数を必要とする。したがって、Grassmann 代数について最後に触れる。

## TABLE OF CONTENTS



## 1 量子力学における経路積分

### 1.1 確率振幅の経路積分表示

混乱を避けるため、以降では Schrödinger 表示での波動関数には添え字 $s$ をつけることにする。今、座標演算子 $Q(t)$ に対し固有値 $q$ をとる状態を $|\, q,t\,\rangle$ と書く。これに対し、同じ固有値 $q$ をもつ Schrödinger 表示での演算子 $Q_s$ の固有状態を $|\, q\,\rangle_s$ と書くことにする。

さて、これから求めたいのは、状態 $|\, q_I,t_I\,\rangle$ から状態 $|\, q_F,t_F\,\rangle$ への遷移確率振幅

$$\langle\, q_F,t_F\,|\, q_I,t_I\,\rangle \tag{1}$$

を、時刻 $t_I$ から時刻 $t_F$ の間に粒子が経験するであろう状態変化の道筋すべてについて確率振幅を求め、それらの和で表示することである。もしも古典力学であれば、この道筋は最小作用の原理によって唯一に決まるが、量子論的には考えられるあらゆる道筋について考慮しなければならない。というわけで、まずは時間を $n$ 個に細分化し、その時間幅 $\Delta t \equiv (t_F - t_I)/n$ および $t_j \equiv t_I + j\Delta t$ を定義する。ただし $j = 0, 1, 2, \cdots, n$ である。このとき、完全系であることを考えれば、$q_n = q_F, q_0 = q_I$ として、確率振幅は

$$\langle\, q_F, t_F \,|\, q_I, t_I \,\rangle = \prod_{i=1}^{n-1} \int dq_i \langle\, q_n, t_n \,|\, q_{n-1}, t_{n-1} \,\rangle \cdots \langle\, q_1, t_1 \,|\, q_0, t_0 \,\rangle \tag{2}$$

と書ける。$n \ll 1$ であれば $\Delta t\ gg1$ であるから、各区間において近似式

$$\begin{aligned} \langle\, q_{j+1}, t_{j+1} \,|\, q_j, t_j \,\rangle &= {}_s\langle\, q_{j+1} \,| e^{-iH\Delta t} |\, q_j, t_j \,\rangle_s \qquad (3)\\ &\simeq {}_s\langle\, q_{j+1} \,|\, q_j \,\rangle_s - i\,{}_s\langle\, q_{j+1} \,| H |\, q_j \,\rangle_s \Delta t \qquad (4) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、Hamiltonian 演算子を与える必要があるが、運動項が非線形なものとして

$$H = \frac{P^2}{2m} f(Q) + V(Q) \tag{5}$$

を考える。ここで $P, Q$ は演算子である。これから

$$\begin{aligned} {}_s\langle\, q_{j+1} \,| H |\, q_j \,\rangle_s &= {}_s\langle\, q_{j+1} \,| \frac{P^2}{2m} f(Q) |\, q_j \,\rangle_s + {}_s\langle\, q_{j+1} \,| V(Q) |\, q_j \,\rangle_s \qquad (6)\\ &= \int dp\ {}_s\langle\, q_{j+1} \,|\, p \,\rangle_s {}_s\langle\, p \,| \left( \frac{P^2}{2m} \right) |\, q_j \,\rangle_s f(q_j) + V(q_j) {}_s\langle\, q_{j+1} \,|\, q_j \,\rangle_s \qquad (7)\\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \frac{p^2}{2m} f(q_j) + V(q_j) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \qquad (8)\\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \left\{ \frac{p^2}{2m} f(q_j) + V(q_j) \right\} \qquad (9)\\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} H(q_j, p) \qquad (10) \end{aligned}$$

となる。したがって、求めるべき確率振幅は

$$\langle\, q_F, t_F \,|\, q_I, t_I \,\rangle \simeq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int dq_i \prod_{j=0}^{n-1} [{}_s\langle\, q_{j+1} \,|\, q_j \,\rangle_s - i {}_s\langle\, q_{j+1} \,|H|\, q_j \,\rangle_s \Delta t] \tag{11}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \int \frac{dq_i dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} - \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1} \int \frac{dq_i dp}{2\pi} i e^{ip(q_{j+1}-q_j)} H(q_j, p) \Delta t \right\} \tag{12}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{dq_i dp}{2\pi} \prod_{j=0}^{n-1} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} [1 - iH(q_j, p)\Delta t] \tag{13}$$

$$\simeq \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{dq_i dp}{2\pi} \prod_{j=0}^{n-1} e^{ip(q_{j+1}-q_j)} e^{-iH(q_j,p)\Delta t} \tag{14}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int \frac{dq_i dp}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^{n-1} [p(q_{j+1} - q_j) - H(q_j, p)\Delta t] \right\} \tag{15}$$

$$\simeq \lim_{n\to\infty} \int \frac{dp_0}{2\pi} \prod_{j=1}^{n-1} \int \frac{dq_j dp_j}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=0}^{n-1} [p_j(q_{j+1} - q_j) - H(q_j, p_j)\Delta t] \right\} \tag{16}$$

$$\equiv \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \mathcal{D}\, p \exp \left[ i \int_{t_I}^{t_F} dt \{ p\dot{q} - H(q,p) \} \right] \tag{17}$$

$$= \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \mathcal{D}\, p \; e^{iS[p,q]} \tag{18}$$

と表される。この積分を**位相空間での経路積分**という。また、$f=1$ であれば、運動量についての Gauss 積分となるので、

$$\langle\, q_F, t_F \,|\, q_I, t_I \,\rangle = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{m}{i2\pi\Delta t} \right)^{n/2} \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left[ i \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta t} \right)^2 - V(q_j) \right\} \Delta t \right] \tag{19}$$

$$\equiv \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \exp \left[ i \int_{t_I}^{t_F} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \right] = \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \; e^{iS[q]} \tag{20}$$

これは**座標空間での経路積分**という。また、多自由度に拡張するには、単純に

$$\langle\, q_F^1, \cdots q_F^N, t_F \,|\, q_I^1 \cdots q_I^N, t_I \,\rangle = \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \prod_{l=1}^{N} \mathcal{D}\, q^l \mathcal{D}\, p_l \; e^{iS[p_l, q^l]} \tag{21}$$

$$= \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \prod_{l=1}^{N} \mathcal{D}\, q^l \; e^{iS[q_l]} \qquad (f=1) \tag{22}$$

となる。

　しかし、これらの経路積分は数学的厳密さに欠けており、今日でも厳密さにおいては成功しているとはいえない。

## 1.2　量子力学における Green 関数

経路積分の定式化において、確率振幅を微小な区間の確率振幅の積として、未来ほど左側にして表現しなおしていたことを思い出すと、ある演算子 $A(t)$ を挟んだ確率振幅は

$$\langle\, q_F, t_F\, | T(A(t_1)A(t_2)) |\, q_I, t_I\, \rangle = \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \mathcal{D}\, p\ a(t_1)a(t_2)e^{iS[p,q]} \tag{23}$$

のように、$A(t)$ に対応する固有値 $a(t)$ を用いて表されることが分かる。ただし、$t_1, t_2$ は $t_I$ から $t_F$ の間の時間である。

そこで、ここではこの表式を用いて、量子力学における Green 関数を求めることにする。まず、$t_F > t > t_1$ および $t_2 > t' > t_I$ とすると、

$$\langle\, q_F, t_F\, | T(A(t_1)A(t_2)) |\, q_I, t_I\, \rangle = \int dq dq' \langle\, q_F, t_F\, |\, q, t\, \rangle \langle\, q, t\, | T(A(t_1)A(t_2) |\, q', t'\, \rangle \langle\, q', t'\, |\, q_I, t_I\, \rangle \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &= \int dq dq'\ {}_s\langle\, q_F\, | e^{-iH(t_F-t)} |\, q\, \rangle_s \\ &\quad \times \langle\, q, t\, | T(A(t_1)A(t_2) |\, q', t'\, \rangle \langle\, s\, | q' e^{-iH(t'-t_I)} |\, q_I\, \rangle_s \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &= \int dq dq' \left[ \sum_n {}_s\langle\, q_F\, |\, n\, \rangle_s e^{-iE_n(t_F-t)} {}_s\langle\, n\, |\, q\, \rangle_s \right] \\ &\quad \times \langle\, q, t\, | T(A(t_1)A(t_2) |\, q', t'\, \rangle \left[ \sum_m {}_s\langle\, q'\, |\, n\, \rangle_s e^{-iE_m(t'-t_I)} {}_s\langle\, n\, |\, q_I\, \rangle_s \right] \end{aligned} \tag{26}$$

となる。したがって、

$$\lim_{t_F\to -i\infty, t_I \to i\infty} e^{iE_0 t_F} \langle\, q_F, t_F\, | T(A(t_1)A(t_2)) |\, q_I, t_I\, \rangle e^{-iE_0 t_I} \tag{27}$$

$$= \int dq dq'\ {}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s {}_s\langle\, 0\, || \, q, t\, \rangle \langle\, q, t\, | T(A(t_1)A(t_2) |\, q', t'\, \rangle \langle\, p', t'\, ||\, 0\, \rangle_s {}_s\langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s \tag{28}$$

$$= {}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s \langle\, 0\, | T(A(t_1)A(t_2) |\, 0\, \rangle_s \langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s \tag{29}$$

$$= {}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s G(t_1, t_2) {}_s\langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s \tag{30}$$

が得られる。また、演算子を挟まなければ、上式は単純に ${}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s {}_s\langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s$ となる。したがって、Green 関数 $G$ は

$$G(t_1, t_2) = \frac{{}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s G(t_1, t_2) {}_s\langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s}{{}_s\langle\, q_F\, |\, 0\, \rangle_s {}_s\langle\, 0\, |\, q_I\, \rangle_s} \tag{31}$$

$$= \lim_{t_F\to -i\infty, t_I \to i\infty} \left[ \frac{\langle\, q_F, t_F\, | T(A(t_1)A(t_2)) |\, q_I, t_I\, \rangle}{\langle\, q_F, t_F\, |\, q_I, t_I\, \rangle} \right] \tag{32}$$

$$= \lim_{t_F\to -i\infty, t_I \to i\infty} \frac{1}{\langle\, q_F, t_F\, |\, q_I, t_I\, \rangle} \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \mathcal{D}\, p\ a(t_1)a(t_2)e^{iS[p,q]} \tag{33}$$

となる。同様にして、$n$ 点 Green 関数は

$$G(t_1, \cdots, t_n) = \lim_{t_F\to -i\infty, t_I \to i\infty} \frac{1}{\langle\, q_F, t_F\, |\, q_I, t_I\, \rangle} \int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F} \mathcal{D}\, q \mathcal{D}\, p\ a(t_1) \cdots a(t_n) e^{iS[p,q]} \tag{34}$$

となる。

## 1.3 Green 関数の生成汎関数と汎関数微分

Green 関数を表現する方法として、ここでは生成汎関数という概念を紹介する。まず、汎関数とは関数により決まる量のことであり、要するに関数の関数である。汎関数の例は、すでに最小作用の原理でおなじみの作用 $S[L]$ などである。この場合は、$S$ は $L$ の汎関数である。

### ▶ 汎関数微分 ◀

汎関数 $Z[J]$ が与えられたとする。このとき、関数 $J$ が $J+\delta J$ のように微小変分をつけて置き換えられた場合、

$$Z[J+\delta J]-Z[J]=\int dt\left(\frac{\delta}{\delta J(t)}Z[J]\right)\delta J(t) \tag{35}$$

なる量 $(\delta/\delta J(t))Z[J]$ を $Z[J]$ の汎関数微分という。具体的に

$$Z[J]=\int dtJ(t)z(t) \tag{36}$$

としよう。ただし、$J, z$ は $t$ の関数である。このとき、汎関数微分は

$$\left(\frac{\delta}{\delta J(t)}Z[J]\right)=z(t) \tag{37}$$

となる。というのも、実際

$$Z[J+\delta J]-Z[J]=\int dt[J(t)+\delta J(t)]z(t)-\int dtJ(t)z(t)=\int dtz(t)\delta J(t) \tag{38}$$

となるからである。

### ▶ 生成汎関数 ◀

さて、この汎関数というものを使って Green 関数を表すことができる。実際、Green 関数の表式（34）を用いれば、

$$G(t_1,\cdots,t_n)=(-i)^n\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(t_n)}Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{39}$$

$$Z[J]\equiv\lim_{t_F\to-i\infty,t_I\to i\infty}\frac{1}{\langle\, q_F,t_F\,|\,q_I,t_I\,\rangle}\int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F}\mathcal{D}\,q\mathcal{D}\,p\ \exp\left\{iS[p,q]+i\int_{t_I}^{t_F}J(t)a(t)\right\} \tag{40}$$

となる。ここで $Z[J]$ は Green 関数の生成汎関数、あるいは母関数といわれる。$Z[J]$ は上式で定義されるが、これを変形すると

$$\begin{aligned}Z[J]&=\lim_{t_F\to-i\infty,t_I\to i\infty}\frac{1}{\langle\, q_F,t_F\,|\,q_I,t_I\,\rangle}\int_{q(t_I)=q_I}^{q(t_F)=q_F}\mathcal{D}\,q\mathcal{D}\,p\ \exp\left\{i\int_{t_I}^{t_F}J(t)a(t)\right\}e^{iS[p,q]} &(41)\\&=\langle\,0\,|T\exp\left[i\int dtJ(t)A(t)\right]|\,0\,\rangle &(42)\end{aligned}$$

が得られる。

# 2　経路積分量子化

ここからは、場の量子化のひとつの方法である経路積分量子化について説明する。とくに断らない限り、場の演算子 $\phi$ はくりこまれた場の演算子とする。

## 2.1　量子化した経路積分

すでに述べたように、量子化を行ったとき、離散的な値をてっていた量を連続変数へと置き換える。すなわち、微小量 $d\phi$ の無限積

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{l=1}^{N} d\phi_l \equiv \mathcal{D}\,\phi \tag{43}$$

によって経路積分を書き換える。正準量子化では交換関係を課すことで理論を進めていったが、経路積分量子化では Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ により理論を展開する。まず、量子力学における $Z[J]$ の表式（40）から、場を量子化した場合における $Z[J]$ を

$$Z[J] \equiv N\int \mathcal{D}\,\phi\mathcal{D}\,\pi\ \exp\left\{iS[\phi,\pi] + i\int dx^4 J(x)\phi(x)\right\} \tag{44}$$

と、規格化定数 $N$ を用いて定義しなおされるとする。さらにこれが $n$ 点 Green 関数を与えると仮定する。つまり

$$G(x_1,\cdots,x_n) \equiv \langle\, 0\,|T[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]|\,0\,\rangle \tag{45}$$

$$= (-i)^n\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta\,J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\,J(x_n)}Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{46}$$

とする。したがって、実際に汎関数微分を行うことで

$$Z[J] = \langle\, 0\,|T\exp\left[i\int dx^4 J(x)\phi(x)\right]|\,0\,\rangle \tag{47}$$

が得られる。

しかし、実際に散乱問題などを扱う場合には、これで十分というわけではない。というのは、例えば Green 関数 $G(x_1,x_2,x_3,x_4)$ を考えたとき、この 4 点が相互作用を起こしている場合のみが含まれているわけではない。この中には、$x_1\to x_2, x_3\to x_4$ のように相互作用せず素通しの分も含まれている。したがって、4 点相互作用を表す Green 関数 $G_c(x_1,x_2,x_3,x_4)$ は

$$G_c(x_1,x_2,x_3,x_4) = G(x_1,x_2,x_3,x_4) - G(x_1,x_2)G(x_3,x_4) - G(x_1,x_3)G(x_2,x_4) - G(x_1,x_4)G(x_2,x_4) \tag{48}$$

と表される。$G_c$ は連結 Green 関数といわれる。このようなことを考えれば、$n$ 点連結 Green 関数 $G_c(x_1,\cdots,x_n)$ を生成する汎関数 $W[J]$ は

$$W[J] \equiv -i\ln\left(\frac{Z[J]}{Z[J=0]}\right) \tag{49}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1\cdots\int d^4x_n J(x_1)\cdots J(x_n)G_c(x_1,\cdots x_n) \tag{50}$$

となる。つまり、

$$G_c(x_1, \cdots x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} W[J] \bigg|_{J=0} \tag{51}$$

が得られる。

# 3 Grassmann 代数

## 3.1 Grassmann 数

今、2 つの数 $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ があって、積だけは

$$\mathcal{G}\mathcal{G}' = -\mathcal{G}'\mathcal{G} \tag{52}$$

のように、ふつうの数とは異なるとする。すると、$\mathcal{G}\mathcal{G} = 0$ が成り立つことがすぐに分かり、奇妙な性質をもった数である。この数を Grassmann 数というが、数学的に厳密な定義は後で述べる。

$a, b, c$ はふつうの数として、関数

$$f(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = a + b\mathcal{G} + c\mathcal{G}\mathcal{G}' = a + b\mathcal{G} - c\mathcal{G}'\mathcal{G} \tag{53}$$

を考える。この関数の微分を考えると、

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} f(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} (a + b\mathcal{G} + c\mathcal{G}\mathcal{G}') = b + c\mathcal{G}' \tag{54}$$

となる一方で、

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} f(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} (a + b\mathcal{G} - c\mathcal{G}'\mathcal{G}) = b - c\mathcal{G}' \tag{55}$$

となる。したがって、上式と下式の微分は区別する必要がでてくる。そこで、微分するものを一番左側によせて微分することを左微分、逆に右側によせて微分することを右微分ということにする。

## 3.2 Grassmann 代数

ここでは、Dirac 場のように反交換関係を満たす場の経路積分量子化に必要な Grassmann 代数について紹介する。一般に体 $K$ 上の $n$ 次元ベクトル空間 $V$ があるとして、集合 $G$ で

1. $G$ は $K$ と $V$ の要素を含み、$K$ の零元と $V$ の零元は同じとみなす。

2. $G$ は演算 $+, \wedge$ が定義され、$\wedge$ に対しては単位元のない非可換環であり、体 $K$ 上のベクトル空間でもある。特に和 $+$ については Abel 群である。[*1] また積 $\wedge$ についてはさらに以下のように定義しておく。

$$g \wedge g' = -g' \wedge g \tag{56}$$

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0 \tag{57}$$

ただし、$e_1, \cdots, e_n$ は $V$ の基底である。

[*1] この公理より $K$ の要素と $V$ の要素の和も定義される。

3. $G$ の要素は $K$ の要素、$V$ の要素、$V$ の要素の $\wedge$ 積で表される要素のみである。$K$ の積の単位元を 1 と表す。

を満たすものは **Grassmann 代数**、あるいは**外積代数**という。これから明らかなように、$g \wedge g = 0$ である。

また、Grassmann 代数の任意の要素 $g$ は

$$g = g^0 + g^i e_i + g^{ij} e_i \wedge e_j + \cdots + g^{1\cdots n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{58}$$

と表せる。ここで $g^0, g^i, g^{ij}, \cdots, g^{1\cdots n}$ は $K$ の要素である。このように、$V$ の基底を用いると便利であり、$G$ においては $V$ の基底の組を **Grassmann 数**という。

ここで、Grassmann 数と行列式の関係についての定理を紹介しておく。今、${\mathcal{G}'}_i = J_i^j \mathcal{G}_j$ のようにして行列 $J_i^j$ により $n$ 個の Grassmann 数どうしの関係がつけられているとする。このとき、

$$\begin{aligned} {\mathcal{G}'}_1 \wedge \cdots \wedge {\mathcal{G}'}_n &= (J_1^j \mathcal{G}_j) \wedge \cdots \wedge (J_n^j {\mathcal{G}'}_j) && (59) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) J_1^{\sigma(1)} \cdots J_n^{\sigma(n)} \mathcal{G}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}_n && (60) \\ &= \det(J) \mathcal{G}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}_n && (61) \end{aligned}$$

が成り立つ。

## 3.3 Grassmann 数による微積分

### ▶ Grassmann 数による微分 ◀

以降では、Grassmann 数による微積分を定義し、その性質を見る。

微分は 2 種類あり、

$$\frac{\partial^l}{\partial \mathcal{G}} (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'') \equiv \mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'' \tag{62}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial \mathcal{G}} (\mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'' \wedge \mathcal{G}) \equiv \mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'' \tag{63}$$

と定義する。また、

$$\frac{\partial^l}{\partial \mathcal{G}} \mathcal{G} \equiv 1 \tag{64}$$

$$\frac{\partial^r}{\partial \mathcal{G}} \mathcal{G} \equiv 1 \tag{65}$$

このとき、式（62）で定義される微分を**左微分**、式（63）で定義される微分を**右微分**という。

$$\left( \frac{\partial^l}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\partial^r}{\partial \mathcal{G}} \right) (\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}') = 0 \tag{66}$$

が成り立つ。また $K$ の要素に作用したときは 0 とする。$G$ の要素は必ず式（58）の形をしているので、これだけの定義で十分である。

### ▶ Grassmann 数による積分 ◀

次に積分の定義に移る。今、Grassmann 数を含まない $G$ の要素を $g^0$、$g' = g^0 + \mathcal{G}$ として

$$\int dg'\, g' = \int d\mathcal{G}\, \mathcal{G} + \int d\mathcal{G}\, g^0 \tag{67}$$

と変数変換できるが、並進対称性を考慮して左辺と右辺の第一項は等しいと考える。したがって

$$\int d\mathcal{G}\, g^0 \equiv 0 \tag{68}$$

をまず一つ目の定義とする。また、Grassmann 数に対しては

$$\int d\mathcal{G}\mathcal{G} = 1 \tag{69}$$

$$\int d\mathcal{G}(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'') \equiv \mathcal{G}' \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'' \tag{70}$$

とする。積分の場合には、積分するものを一番左側にもってくる [*2] ものとする。つまり、左微分と積分の操作は変わらない。

### ▶ 変数変換 ◀

Grassmann 数の変数変換 $\mathcal{G}'_i = J_i^j \mathcal{G}_j$ により、式（61）を用いれば、積分は

$$1 = \int d\mathcal{G}'_1 \cdots d\mathcal{G}'_n\, \mathcal{G}'_n \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}'_1 = \int (N d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_n)\, \det(J) \mathcal{G}_n \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}_1 = 1 \tag{71}$$

とならなければいけない。したがって、$N = 1/\det(J)$ であり、

$$\int d\mathcal{G}'_1 \cdots d\mathcal{G}'_n = \int d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_n \frac{1}{\det(J)} \tag{72}$$

のように、分母に Jacobian がくる。

### ▶ Gauss 積分 ◀

Dirac 場の経路積分を行う際に重要になる積分として、Grassmann 数での Gauss 積分がある。これは、

$$\mathrm{Pf}A = \int d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_n\, \exp\left(-\frac{1}{2} A^{ij} \mathcal{G}_j \wedge \mathcal{G}_i\right) \tag{73}$$

という形の積分のことをいい、Pfaffian ともいう。ただし $A$ は反対称行列である。積分の定義から明らかなように、$n$ が奇数であればこの積分は 0 を与える。また、$n = 2$ であれば、

$$\mathrm{Pf}A = \int d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G}_2\, \exp\left(-\frac{A^{12}}{2} \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2 - \frac{A^{21}}{2} \mathcal{G}_2 \wedge \mathcal{G}_1\right) \tag{74}$$

$$= \int d\mathcal{G}_1 d\mathcal{G}_2\, \left(1 - A^{12} \mathcal{G}_2 \wedge \mathcal{G}_1\right) = -A^{12} = \sqrt{\det(A)} \tag{75}$$

[*2] ここで、微分のときと同様に左積分と右積分を定義してもよいが、少なくともここでは定義しておく意味がない。したがって、以降では左積分を積分と考えていく。

となる。ここでもしも右積分を定義していれば、符号が逆の値になる。一般に、$n$ が偶数 $2m$ の場合には、

$$\mathrm{Pf} A = \int d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_{2m} \prod^m \left( -\frac{1}{2} A^{ij} \mathcal{G}_j \wedge \mathcal{G}_i \right) = \int d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_{2m} \prod^m \sum_{j>i} \left( -A^{ij} \mathcal{G}_j \wedge \mathcal{G}_i \right) \tag{76}$$

$$= \int d\mathcal{G}_1 \cdots d\mathcal{G}_{2m} \sum_{\sigma \in S_n, l \neq \sigma(l)} \mathrm{sgn}(\sigma) A^{1\sigma(1)} \cdots A^{n\sigma(n)} \mathcal{G}_{2m} \wedge \cdots \wedge \mathcal{G}_1 \tag{77}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n, l \neq \sigma(l)} \mathrm{sign}(\sigma) A^{1\sigma(1)} \cdots A^{n\sigma(n)} = \sqrt{\det(A)} \tag{78}$$

となる。