4. Interaction Fields

——————— 2008/08/12, Toshiya Namikawa

ABSTRACT

相互作用をする場を扱う場合、一般には演算子の時間発展を生成消滅演算子で表現することはできない。そこで、ここでは相互作用場がある場合におそらく成り立つであろう公理を設定し、そこから得られる結論を導くことにする。また、場の量子論の核である遷移確率、散乱断面積などの計算に必要であったS行列に対するLSZ簡約公式を最後に紹介する。

TABLE OF CONTENTS

1 相互作用場に対する公理

相互作用を考える場合には、生成消滅演算子による演算子の時間発展は表現できない。そこで以下のように公理を決める。

1. 4元運動量の固有状態で物理的状態の完全系をつくれる。
2. 4元運動量の固有値 p^μ に対し、$m^2 = p^\mu p_\mu \geq 0$ であり、$p^0 \geq 0$ が成り立つ。
3. 最低エネルギー状態 $|0\rangle$ は縮退していない。さらにこの状態は、平行移動・回転・Lorentz変換のもとで不変。この状態 $|0\rangle$ を真空とよび、4元運動量演算子 P^μ の固有状態で、その固有値がゼロ。
4. 安定な1粒子状態が存在する。
5. 真空と1粒子状態の4元運動量ははっきりと分かれている。つまり真空、1粒子状態は P^2 の離散スペクトルである [*1]。

[*1] この公理は強い場合がある。というのは、電磁場の場合、光子は質量0であり、スペクトルは真空および1粒子状態から連続となるからである。

6. 確率の保存を保証するため、物理的状態は正定値である。

7. 光速より事象が速く伝わらない [*2] 。

以上の公理を仮定した場合に、どのような結論が得られるかを以下で考えることにする。

2 スペクトル表示とスペクトル関数

2.1 相互作用場の正準量子化

実スカラー場における相互作用を考えよう。すなわち、Lagrangian 密度として

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_I \tag{1}$$

のように、自由スカラー場における Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_f$ とその残りの部分 $\mathcal{L}_I$ で書かれているとする。この相互作用場に対して同時刻での正準交換関係を課す、すなわち $\pi = \partial_0 \phi$ として

$$[\phi(t, \boldsymbol{x}), \pi(t, \boldsymbol{y})] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{2}$$

$$[\phi(t, \boldsymbol{x}), \phi(t, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{3}$$

$$[\pi(t, \boldsymbol{x}), \pi(t, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{4}$$

とする。ここから、実自由スカラー場のときと同様に生成消滅演算子を定義していきたいところだが、相互作用が入るとうまく定義できない。しかし、自由場における量を用いて表現することができる。

2.2 スペクトル表示

さて、今から示すのは、交換関係の真空期待値 $\Delta'(x, y) = \langle 0 |[\phi(x), \phi(y)]| 0 \rangle$ は積分表示できることを示す。まず、時空並進不変性から、正準量子化での議論より場の演算子の時間発展は 4 元運動量演算子の相似変換で表せるので、任意の状態 n, m の間の場の演算子の行列要素は

$$\langle n |\phi(x)| m \rangle = \langle n |e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}| m \rangle = e^{i(p_n - p_m)x}\langle n |\phi(0)| m \rangle \tag{5}$$

と書ける。したがって、

$$\begin{aligned}
\Delta'(x, y) &= \sum_n \langle 0 |\phi(0)| n \rangle\langle n |\phi(0)| 0 \rangle\{e^{-ip_n(x-y)} - e^{ip_n(x-y)}\} && (6)\\
&= \int d^4q \sum_n \delta(p_n - q)\langle 0 |\phi(0)| n \rangle\langle n |\phi(0)| 0 \rangle\{e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)}\} && (7)\\
&= \int d^4q \frac{\rho(q^2)}{(2\pi)^6}\theta(q_0)\{e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)}\} && (8)\\
&= \int_0^\infty d\sigma\rho(\sigma) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\delta(q^2 - \sigma)\mathrm{sign}(q_0)e^{-iq(x-y)} && (9)\\
&= \int_0^\infty d\sigma\rho(\sigma)\Delta(x - y, \sigma) && (10)
\end{aligned}$$

[*2] 場の理論では、今までのところ、局所相互作用理論、つまり、同一点での場の演算子とその有限回の微分の間でのみ相互作用が起こる理論でだけ、この要請を受け入れることができている。

と計算できる。ただし、式（7）から式（8）への変形の際、Lorentz 変換における確率の不変性、および エネルギー運動量のゼロ成分が正、つまり $q_0 > 0$ であるという条件から、

$$(2\pi)^3 \sum_n \delta(p_n - q)\langle\, 0\,|\phi(0)|\, n\,\rangle\langle\, n\,|\phi(0)|\, 0\,\rangle = \rho(q^2)\theta(q_0) \tag{11}$$

と置いた。また、$\Delta(x-y,\sigma)$ は、質量 $\sqrt{\sigma}$ の実自由スカラー場に対する交換子関数である。

こうして得られた積分表示（10）はスペクトル表示、または Umezawa-Kamebuchi-Källen-Lehmann 表示といい、ρ をスペクトル関数という。スペクトル表示を見ると分かるように、相互作用の交換子関数は、質量 $\sqrt{\sigma}$ の自由粒子の交換子関数に重みをつけて足しあげたものになっている。また、$\Delta'(x,y)$ は $x-y$ に依存するので、$\Delta'(x-y)$ と書くことにする。

2.3 スペクトル関数

物理的状態空間が正定値であるという要請をすると、ρ の定義から

$$\rho(\sigma) \geq 0 \tag{12}$$

である。また、同時刻交換関係より、

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \langle\, 0\,|[\phi(x), \partial_{y^0}\phi(y)]|_{x^0=y^0}|\, 0\,\rangle = \partial_{y^0}\Delta'(x-y)|_{x^0=y^0} \tag{13}$$

が成り立つから、スペクトル関数に対する和則

$$1 = \int_0^\sigma d\sigma\rho(\sigma) \tag{14}$$

が得られる。連続状態の 4 元運動量の 2 乗最低値を m_1^2 とすれば、1 粒子状態の質量を m として、$\sigma < m_1^2$ のとき $\rho(\sigma) = Z\delta(\sigma - m^2)$ と書けるとすると、スペクトル関数の和則により

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^\infty d\sigma\rho(\sigma) \tag{15}$$

と書ける。したがって、$0 \leq Z \leq 1$ が成り立つ。しかしこれは自明である。というのは、Z は相互作用場が真空に作用したときに、その中に含まれる 1 粒子状態の確率を表現しているからである。結局 Heisenberg 表示での相互作用場の交換子の真空期待値は

$$\Delta'(x-y) = Z\Delta(x-y,m^2) + \int_{m_1^2}^\infty d\sigma\rho(\sigma)\Delta(x-y,\sigma) \tag{16}$$

となる。

3 散乱問題における漸近場と LSZ 簡約公式

この節では、まず 1 粒子状態を表す実スカラー場の散乱問題を念頭におき、最後に n 粒子に対して考える。十分過去では相互作用場は自由場と思ってよいはずなので、これを仮定する。このときの場を In-field といい、ϕ_{in} と表す。一方、同様に十分未来においても同じ仮定をするが、一般には別の自由場になっていると考えられるので Out-field といい、ϕ_{out} と書く。このような $\phi_{\mathrm{in}}, \phi_{\mathrm{out}}$ を漸近場と呼ぶ。

3.1　漸近条件

前節の式（16）において、相互作用がほとんどない場合には 1 粒子状態の項、つまり Z に比例する項のみと思って近似できる。したがって、規格化定数は漸近場において $\sqrt{Z}$ 倍されるので、任意の 2 つの状態 α, β に対し、

$$\langle\, \alpha \,|\phi(x)|\, \beta\,\rangle = \lim_{x^0\to-\infty} \langle\, \alpha \,|\sqrt{Z}\phi_{\mathrm{in}}(x)|\, \beta\,\rangle \tag{17}$$

$$= \lim_{x^0\to\infty} \langle\, \alpha \,|\sqrt{Z}\phi_{\mathrm{out}}(x)|\, \beta\,\rangle \tag{18}$$

が成り立つ。このように漸近場を用いて表現したこの条件は Lehmann-Symanzik-Zinmmerman の漸近条件と呼ばれる。ここで、演算子の等式を表すときに用いられる**強い等式**と**弱い等式**について触れておく。強い等式とは、そのまま演算子どうしの等式であり、弱い等式は、上記の漸近場のように状態ベクトルではさむことによって初めてなりたつ等式のことである。弱い等式の記号は「≈」であり、弱い等式で漸近条件を表すと、

$$\phi(x) \approx \lim_{x^0\to-\infty} \sqrt{Z}\phi_{\mathrm{in}}(x) \tag{19}$$

$$\approx \lim_{x^0\to\infty} \sqrt{Z}\phi_{\mathrm{out}}(x) \tag{20}$$

となる。

▶ Yang-Feldman 方程式 ◀

一般の相互作用場の Euler-Lagrange 方程式は

$$K_m(x)\phi(x) = j(x) \tag{21}$$

の形をしている。したがって、これを漸近条件のもとで解くと

$$\begin{aligned}\phi(x) &\approx \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{in}}(x) + \int d^4y\, \Delta_{\mathrm{ret}}(x-y)j(y)\\ &\approx \sqrt{Z}\,\phi_{\mathrm{out}}(x) + \int d^4y\, \Delta_{\mathrm{adv}}(x-y)j(y)\end{aligned} \tag{22}$$

のようになる。これを **Yang-Feldman 方程式**といい、相互作用場と自由場の間の関係を与える。ここで Δ_{ret} は遅延 Green 関数、Δ_{adv} は先行 Green 関数とよばれ、

$$\Delta_{\mathrm{ret}}(x) = -\theta(x_0)\Delta(x) \tag{23}$$

$$\Delta_{\mathrm{adv}}(x) = \theta(x_0)\Delta(x) \tag{24}$$

で定義される。

さて、$\phi_{\mathrm{in}}, \phi_{\mathrm{out}}$ は自由場だから、自由場における議論をそのまま適用できる。つまり、In-field,Out-field 両方の場に対し、生成消滅演算子を定義でき、

$$\phi_{\mathrm{in}}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\{e^{-ipx}a_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}) + e^{ipx}a^\dagger_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p})\} \tag{25}$$

$$\phi_{\mathrm{out}}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\{e^{-ipx}a_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}) + e^{ipx}a^\dagger_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p})\} \tag{26}$$

と書ける。

3.2 LSZ 簡約公式

In-field、Out-field の生成消滅演算子で構成される Fock 空間をそれぞれ $V_{\rm in}, V_{\rm out}$ とし、Heisenberg 表示での相互作用場 ϕ の状態空間を V とする。これら 3 つの状態空間が一致すると仮定することを、**漸近的完全性**という。

以下では、この漸近的完全性を仮定する。

► S 行列 ◄

過去には状態 α であった入射波が未来には状態 β に移る確率振幅を表現するために、

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle\, \beta\, out \,|\, \alpha\, in \,\rangle \tag{27}$$

を定義し、S 行列と言った。また、

$$\langle\, \beta\, in \,|S|\, \alpha\, in \,\rangle \equiv \langle\, \beta\, out \,|\, \alpha\, in \,\rangle \tag{28}$$

という演算子 S を定義する。In 状態は完全系であるから、右から $\langle\, \alpha\, in \,|$ をかけて

$$\langle\, \beta\, in \,|S = \langle\, \beta\, out \,| \tag{29}$$

が成り立つ。同様に Out 状態も完全系をなすから、

$$S^{\dagger}_{\beta\gamma} S^{\gamma\alpha} = \langle\, \beta\, in \,|\, \gamma\, out \,\rangle\langle\, \gamma\, out \,|\, \alpha\, in \,\rangle = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{30}$$

となる。したがって、$S^{\dagger}S = 1$ でもある。

また、

$$\langle\, \alpha\, in \,|S\phi_{\rm out} = \langle\, \alpha\, out \,|\phi_{\rm out} = \langle\, \alpha\, in \,|\phi_{\rm in} S \tag{31}$$

であるから、$S\phi_{\rm out} = \phi_{\rm in} S$ が成り立ち、これに $S^{\dagger}$ をかければ

$$S^{\dagger}\phi_{\rm in} S = \phi_{\rm out} \tag{32}$$

となる。このようにして、In-field と Out-field の場の演算子の関係を S を用いて表される。

► LSZ 簡約公式 ◄

散乱問題における場の演算子の始状態と終状態のすべての組み合わせを要素とする行列が S 行列であり、相互作用の形が分かれば計算できるものである。そこでまずは S 行列の要素を何かの演算子などを用いて見通しをよくしたいと考えるのが普通だろう。ここでは、相互作用がどのようなものであれ、S 行列の要素が n 点 Green 関数を用いて表せることを示す。

まず、Heisenberg 描像の相互作用場 ϕ のかわりに

$$\tilde{\phi} \equiv Z^{-1/2}\phi \tag{33}$$

を定義し、これを**くりこまれた場の演算子**という。すると、漸近条件は

$$\tilde{\phi}(x) \approx \lim_{x^0 \to -\infty} \phi_{\mathrm{in}}(x) \tag{34}$$

$$\approx \lim_{x^0 \to \infty} \phi_{\mathrm{out}}(x) \tag{35}$$

と改めて書き直される。またさらに、生成消滅演算子を

$$A(\boldsymbol{p}) = \sqrt{(2\pi)^3 2p_0}\ a(\boldsymbol{p}), \qquad A^\dagger(\boldsymbol{p}) = \sqrt{(2\pi)^3 2p_0}\ a^\dagger(\boldsymbol{p}) \tag{36}$$

のようにあらたに定義しなおす。こうすると、1 粒子状態 $|\,\boldsymbol{p}\,\rangle = A^\dagger|\,0\,\rangle$ に対し、規格化条件

$$\langle\,\boldsymbol{p}\,|\,\boldsymbol{q}\,\rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{37}$$

を満たす。このように定義しなおした生成消滅演算子は**不変規格化された生成消滅演算子**と言われる。というのは、上記の規格化の右辺が Lorentz 不変だからである。また、この生成消滅演算子で作られていく状態は不変規格化された状態といわれる。以下ではこの生成消滅演算子と状態を計算に用いる。

さて、始状態が p という 4 元運動量の 1 粒子を含んでいたとして、その状態を $|\,\alpha\, p\, in\,\rangle$ と表すことにする。終状態を $\langle\,\beta\, out\,|$ とすれば、S 行列は

$$S_{\beta,\alpha p} = \langle\,\beta\, out\,|\,\alpha\, p\, in\,\rangle = \langle\,\beta\, out\,|A^\dagger_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p})|\,\alpha\, in\,\rangle \tag{38}$$

$$= \langle\,\beta\, out\,|A^\dagger_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p})|\,\alpha\, in\,\rangle - \langle\,\beta\, out\,|(A^\dagger_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}) - A^\dagger_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{p}))|\,\alpha\, in\,\rangle \tag{39}$$

となる。この式の右辺第一項は運動量 p の粒子が終状態でも運動量 p である場合、つまりそのまま通過したというだけであり、このときは第二項が消える。今は散乱を考えているわけで、素通りのような場合を今は考えていないので第一項は無視する。

さて、In-field、Out-field では場の演算子である漸近場は Klein-Gordon 方程式に従うので、以前と同様にして生成消滅演算子を

$$A^\dagger_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}) = i\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\boldsymbol{p})}\int d^3x \left(\phi_{\mathrm{out}}\frac{\partial f_p}{\partial x^0} - \frac{\partial \phi_{\mathrm{out}}}{\partial x^0} f_p\right) \tag{40}$$

$$= i\int d^3x \left((ip_0)e^{-ipx}\phi_{\mathrm{out}} - \frac{\partial \phi_{\mathrm{out}}}{\partial x^0} e^{-ipx}\right) \tag{41}$$

と書いておく。ただし

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\omega_{\boldsymbol{p}}}} e^{-ipx} \tag{42}$$

である。さらに漸近条件を用いれば、場 $\tilde{\phi}$ で表せて

$$A^\dagger_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{p}) \approx \lim_{x^0 \to \infty} i\int d^3x \left((-ip_0)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x^0} e^{-ipx}\right) \tag{43}$$

となる。同様にして

$$A^\dagger_{\rm in}(\boldsymbol{p}) \approx \lim_{x^0\to-\infty} i\int d^3x \left((-ip_0)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x^0}e^{-ipx}\right) \tag{44}$$

であるから、S 行列は

$$\begin{aligned} S_{\beta,\alpha p} &= \langle\,\beta\, out\,|\left[\lim_{x^0\to\infty} i\int d^3x \left((-ip_0)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x^0}e^{-ipx}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \lim_{x^0\to-\infty} i\int d^3x \left((-ip_0)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x^0}e^{-ipx}\right)\right]|\,\alpha\, in\,\rangle && (45) \\ &= i\int d^4x \frac{\partial}{\partial x^0}\left[\langle\,\beta\, out\,|\left((-ip_0)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x^0}e^{-ipx}\right)|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (46) \\ &= i\int d^4x \left[\langle\,\beta\, out\,|\left(-(p_0)^2e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial (x^0)^2}e^{-ipx}\right)|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (47) \\ &= i\int d^4x \left[\langle\,\beta\, out\,|\left((-\boldsymbol{p}^2-m^2)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial (x^0)^2}e^{-ipx}\right)|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (48) \\ &= i\int d^4x \left[\langle\,\beta\, out\,|\left((-\nabla^2-m^2)e^{-ipx}\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial (x^0)^2}e^{-ipx}\right)|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (49) \\ &= i\int d^4x \left[\langle\,\beta\, out\,|\left(e^{-ipx}(-\nabla^2-m^2)\tilde{\phi} - \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial (x^0)^2}e^{-ipx}\right)|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (50) \\ &= i\int d^4x \left[\langle\,\beta\, out\,|e^{-ipx}K_m(x)\tilde{\phi}|\,\alpha\, in\,\rangle\right] && (51) \end{aligned}$$

と書ける。この計算結果は、終状態として 4 元運動量が p となる粒子は考えないとして得られた結果であることに注意する。つまり、もしも状態 β が 4 元運動量 p の粒子のみを含む状態なら、終状態は真空であるので $\langle\,\beta\, out\,| = \langle\,0\,|$ と書き換えなければならない。

さて、いずれにせよ、状態によらない表示にするには、まだこの中に含まれる $\langle\,\beta\, out\,|\tilde{\phi}|\,\alpha\, in\,\rangle$ を計算しなければならない。終状態で 4 元運動量 p' をもった粒子を含む場合を考えると、

$$\begin{aligned} \langle\,\beta p'\, out\,|\tilde{\phi}(x)|\,\alpha\, in\,\rangle &= \langle\,\beta\, out\,|\tilde{\phi}(x)A_(\boldsymbol{p}')|\,\alpha\, in\,\rangle + \langle\,\beta\, out\,|\{A_{\rm out}(\boldsymbol{p}')\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(x)A_{\rm in}(\boldsymbol{p}')\}|\,\alpha\, in\,\rangle && (52) \\ &= i\int d^4y\, e^{ipy}K_m(y)\langle\,\beta\, out\,|T(\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y))|\,\alpha\, in\,\rangle && (53) \end{aligned}$$

となる。ただしここでは始状態として 4 元運動量 p' をもった粒子はなかったとして計算している。つまり、もし始状態として 4 元運動量 p' の粒子しかなければ、$|\,\alpha\, in\,\rangle = |\,0\,\rangle$ としなければならない。

したがって、もしここで始状態が p' 終状態が p のような状況を考えると、S 行列は

$$\langle\,\boldsymbol{p}\, out\,||\,\boldsymbol{p}'\, in\,\rangle = i\int d^4x\, e^{-ipx}K_m(x)\; i\int d^4y\, e^{ipy}K_m(y)\langle\,0\,|T[\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)]|\,0\,\rangle \tag{54}$$

と書け、始状態、終状態によらない。

そうでなければ、今度は状態に依存する $\langle\,\beta\,out\,|T(\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y))|\,\alpha\,in\,\rangle$ を計算することになる。このようにして次々に計算をして粒子を取り除いていくと、最終的に

$$\begin{aligned}&\langle\,\boldsymbol{p}_1,\cdots\boldsymbol{p}_m\,out\,|\,\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_l\,in\,\rangle\\&=\prod_{i=1}^{m}\left[i\int d^4x_i\,e^{ip_ix_i}K_m(x_i)\right]\prod_{j=1}^{l}\left[i\int d^4y_j\,e^{-ip_jy_j}K_m(y_j)\right]G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_l)\end{aligned}\tag{55}$$

が得られる。この式を LSZ 簡約公式という。ただし、

$$G(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_l)\equiv\langle\,0\,|T[\tilde{\phi}(x_1)\cdots\tilde{\phi}(x_m)\tilde{\phi}(y_1)\cdots\tilde{\phi}(y_l)]|\,0\,\rangle\tag{56}$$

であり、G は n 点 Green 関数とよばれる。これ以降は当面、$\tilde{\phi}$ をあらためて ϕ と書くことにする。したがって、ϕ と書けば、くりこまれた場の演算子であることになる。また、注意すべき点は、このくりこまれた場の演算子は Klein-Gordon 方程式をみたす場であれば何でもよいということである。これはのちのゲージ場における Feynman 則の導出のさいにこの LSZ 簡約公式が使えるという保証を与えることになる。

このようにして、n 点 Green 関数が求まれば S 行列を計算でき、そこから観測量である崩壊確率 Γ、散乱断面積 σ などの理論値をはじき出すことができるわけである。つまり、任意の相互作用 Lagrangian が与えられた場合に n 点 Green 関数を計算したいわけである。その求め方は、経路積分量子化における摂動論によって具体的に計算されることが以降で分かることになる。